푸리에 해석 초급 문제 20제

1. 푸리에 급수는 어떤 종류의 함수를 전개할 때 사용되는가?

   풀이: 푸리에 급수는 반복되는 성질, 즉 일정한 주기를 갖는 함수에 대해 적용할 수 있다. 이를 통해 사인 함수와 코사인 함수의 무한급수로 해당 함수를 근사하거나 정확히 표현할 수 있다.

   해설: 주기 함수는 일정한 구간을 지나면 같은 값이 반복되는 함수이다. 예를 들어 전기 신호에서 흔히 볼 수 있는 사인파는 대표적인 주기 함수이다. 푸리에 급수는 이러한 주기 함수들을 다양한 주파수의 사인과 코사인으로 분해함으로써, 복잡한 파형도 간단한 주파수 성분의 조합으로 이해할 수 있게 해주는 도구이다.

   정답: 주기 함수

2. 푸리에 급수 전개에서 sin과 cos는 각각 어떤 정보를 나타내는가?

   풀이: 푸리에 급수에서는 각 사인파와 코사인파가 서로 다른 주파수를 갖고 있으며, 그 계수들이 해당 주파수 성분의 크기(진폭)를 나타낸다.

   해설: sin과 cos 함수는 각각 주기적인 진동을 나타내며, 이들은 서로 직교(orthogonal)한 함수로 모든 주기 함수를 이들의 조합으로 표현할 수 있다. 각 sin, cos 성분은 원래 함수 안에 얼마나 해당 주파수 성분이 포함되어 있는지를 보여주는 역할을 한다. 쉽게 말해, 음악에서 저음, 중음, 고음을 각각 추출하는 것과 비슷하다.

   정답: 주파수 성분의 진폭 정보

3. 주기 T를 갖는 함수의 기본 각주파수는 얼마인가?

   풀이: 각주파수 ω_0는 주기의 역수인 기본 주파수에 2π를 곱한 값이다. 즉 $\omega_0 = \dfrac{2\pi}{T}$ 이다.

   해설: 주기 T란 함수가 다시 원래 상태로 반복되기까지 걸리는 시간이다. 주파수 f는 초당 몇 번 반복되는지를 의미하며, 각주파수 ω는 이를 라디안 기준으로 변환한 값이다. 각주파수는 라디안/초 단위를 사용하며, 푸리에 급수에서는 이 값이 매우 중요하게 사용된다.

   정답: $\omega_0 = \dfrac{2\pi}{T}$

4. 푸리에 급수의 일반 형태에서 a_0은 어떤 값을 의미하는가?

   풀이: a_0은 주기 함수의 전체 평균값을 의미하며, DC 성분이라고 부른다.

   해설: 푸리에 급수의 일반식에서 a_0은 상수항으로, 전체 주기 동안 함수 값의 평균을 나타낸다. 신호의 직류(DC) 성분은 시간에 따라 변하지 않고 항상 같은 값으로 유지되는 부분이며, 회로 해석이나 신호처리에서 매우 중요하다. 예를 들어, 어떤 신호가 +1과 -1 사이를 반복하면 평균값은 0이 될 수 있다.

   정답: 평균값 (DC 성분)

5. 푸리에 급수에서 계수 a_n과 b_n을 구할 때 사용하는 수학적 연산은?

   풀이: 이 계수들은 적분을 이용해 구한다. 각각 코사인과 사인 성분에 대해 원래 함수와의 내적을 계산한다.

   해설: 푸리에 급수 계수는 직교성(orthogonality) 성질을 이용하여 계산된다. 함수 $f(t)$와 코사인 또는 사인 함수의 곱을 일정한 구간에 대해 적분하면 해당 주파수 성분의 계수만 남게 된다. 이 방식은 수학적으로 '내적'이라고 하며, 결과적으로 정적분 계산을 통해 각 계수를 얻을 수 있다.

   정답: 적분

6. 푸리에 급수 전개가 가능한 조건이 아닌 것은?

   풀이: 푸리에 급수는 함수가 주기적이고, 절대적으로 적분 가능하며, 유한한 불연속점과 극값을 갖는 경우에만 가능하다.

   해설: 푸리에 급수가 가능한 함수는 '디리클레 조건(Dirichlet Conditions)'을 만족해야 한다. 즉, 함수가 구간 내에서 유한한 불연속점만 가져야 하며, 무한한 진동이나 무한대의 값이 없어야 한다. 예를 들어, $1/x$ 처럼 무한대로 발산하는 함수는 푸리에 급수 전개가 불가능하다.

   정답: 함수가 유한한 불연속점만 가져야 한다

7. 다음 중 주기 함수가 아닌 것은?

   풀이: 주기 함수는 일정한 간격마다 같은 값을 반복하는 함수이다. e^t는 시간에 따라 계속 증가하므로 주기적이지 않다.

   해설: $\sin(t)$, $\cos(t)$, $\tan(t)$ 등은 주기 함수이다. 하지만 e^t는 지수 함수로, 시간에 따라 지속적으로 증가하거나 감소하며, 어떤 구간을 기준으로도 동일한 값을 반복하지 않는다. 따라서 주기 함수가 아니다.

   정답: e^t

8. 푸리에 급수의 주파수 스펙트럼은 어떤 도메인에서의 표현인가?

   풀이: 시간에 대한 정보를 주파수에 대한 정보로 바꾸는 것이기 때문에 결과는 주파수 도메인에서의 표현이다.

   해설: 주파수 도메인이란, 신호가 어떤 주파수 성분들로 이루어져 있는지를 보여주는 관점이다. 시간에 따른 신호의 복잡한 모양을 주파수 단위로 분석하면 각 성분의 크기와 영향을 파악할 수 있으며, 전자 회로나 통신에서는 이 표현이 매우 중요하다.

   정답: 주파수 도메인

9. 푸리에 급수 전개 시 고조파(harmonics)란 무엇을 의미하는가?

   풀이: 고조파란 기본 주파수의 정수배로 구성된 성분들을 의미한다.

해설: 고조파는 원래 주파수보다 높은 배수 주파수 성분을 뜻한다. 예를 들어 기본 주파수가 50Hz일 때, 2차 고조파는 100Hz, 3차 고조파는 150Hz이다. 실제 전력 시스템이나 음향 장비 등에서는 이러한 고조파 성분을 조절하거나 제거하는 것이 중요하다.

정답: 기본 주파수의 정수배 성분

10. $\sin(nt)$ 성분은 짝수 함수인가, 홀수 함수인가?

    풀이: $\sin(-nt) = -\sin(nt)$이므로, $\sin(nt)$는 홀수 함수이다.

    해설: 함수가 홀수 함수인지 여부는 $f(-t) = -f(t)$를 만족하는지에 따라 판단한다. $\sin(nt)$는 이 조건을 만족하므로 홀수 함수이다. 이는 푸리에 급수 전개에서 b_n 계수 계산 시 중요한 특성이다.

    정답: 홀수 함수

11. $\cos(nt)$ 성분은 짝수 함수인가, 홀수 함수인가?

    풀이: $\cos(-nt) = \cos(nt)$이므로, $\cos(nt)$는 짝수 함수이다.

    해설: 짝수 함수는 $f(-t) = f(t)$의 성질을 만족한다. cos 함수는 대칭성이 있기 때문에 음의 입력을 넣어도 결과가 바뀌지 않는다. 이 특성은 푸리에 급수에서 짝수 함수일 때 b_n이 0이 된다는 성질과도 관련이 있다.

    정답: 짝수 함수

12. 어떤 함수가 푸리에 급수 전개에서 sin 항만으로 표현될 수 있는 조건은?

    풀이: 함수가 홀수 함수일 경우, 푸리에 급수 전개 시 cos 계수 a_n이 모두 0이 된다.

    해설: 함수가 원점 대칭인 경우(즉, $f(-t) = -f(t)$), cos 성분은 기여하지 않으며 sin 성분만 존재한다. 이는 푸리에 급수가 함수의 대칭성에 따라 단순화될 수 있다는 중요한 성질 중 하나이다.

    정답: 함수가 홀수 함수일 때

13. 푸리에 급수에서 주파수 성분이 많을수록 어떤 현상이 나타나는가?

    풀이: 고조파를 더 많이 포함할수록 원래의 복잡한 함수 형태에 더 가깝게 근사된다.

    해설: 푸리에 급수는 이상적으로는 무한 개의 고조파로 구성된다. 실제로는 몇 개의 고조파만으로도 원래 신호를 상당히 정확하게 근사할 수 있다. 고조파를 많이 포함하면 급격한 변화(예: 구형파의 경계)를 더 잘 표현할 수 있게 된다.

    정답: 원래 함수에 더 가까워진다

14. 푸리에 급수를 통해 어떤 분석이 가능한가?

풀이: 신호가 어떤 주파수 성분들로 구성되어 있는지를 분석할 수 있다.

해설: 푸리에 급수는 신호를 시간 도메인에서 주파수 도메인으로 변환함으로써, 신호의 스펙트럼 구조를 파악하게 해준다. 이는 통신, 오디오 처리, 영상 신호 해석 등에 모두 활용된다.

정답: 주파수 성분 분석

15. $\sin(t)$의 주기는 얼마인가?

풀이: 사인 함수의 기본 주기는 2π이다. 즉, 2π마다 값이 반복된다.

해설: $\sin(t)$는 기본적인 주기 함수로, $t = 0$부터 $t = 2\pi$까지의 범위에서 한 번의 파형을 구성한다. 이후에는 반복된다. 이는 푸리에 급수 전개 시 기준 주기로 사용되기도 한다.

정답: 2π

16. 다음 중 푸리에 급수 계수 중 사인 성분에 해당하는 것은?

풀이: sin 성분의 계수는 b_n으로 표기된다.

해설: 일반적인 푸리에 급수 표현은 $a_0 + \sum a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)$ 형태이며, 여기서 b_n이 사인 성분의 계수이다. a_n은 코사인, a_0은 평균값이다.

정답: b_n

17. 푸리에 급수 전개에서 짝수 함수일 경우 어떤 계수가 0이 되는가?

풀이: 홀수 함수인 sin 성분과의 곱의 적분이 항상 0이 되므로 $b_n = 0$이다.

해설: 짝수 함수는 cos과의 곱에만 기여하며, sin과 곱한 결과는 대칭성 때문에 적분 결과가 0이 된다. 따라서 푸리에 급수 전개 시 b_n 계수는 모두 0이 된다.

정답: b_n

18. 푸리에 급수의 전개식에서 $\sum$ 기호는 무엇을 나타내는가?

풀이: $\sum$는 합을 나타내는 기호로, 각 고조파 성분들을 모두 더하는 것을 의미한다.

해설: $\sum_{n=1}^{\infty}$는 $n = 1$부터 무한대까지의 합을 나타낸다. 이는 푸리에 급수에서 무한한 주파수 성분을 하나로 합쳐서 원래 함수를 재구성하는 데 사용된다.

정답: 고조파 성분들의 합

19. 푸리에 급수는 어떤 함수들의 선형 결합으로 표현되는가?

풀이: sin과 cos 함수들의 선형 결합이다.

해설: 푸리에 급수는 $a_n \cos(nt)$, $b_n \sin(nt)$ 같은 형태로 이루어진다. 즉, 각각의 sin과 cos 성분에 계수를 곱해서 더한 형태이므로 선형 결합이다. 이 구조 덕분에 복잡한 파형도 단순한 진동 함수들로 구성 가능하다.

정답: 사인과 코사인의 선형 결합

20. 푸리에 급수를 실용적으로 사용할 수 있는 분야가 아닌 것은?

풀이: 푸리에 급수는 주기 신호 해석에 사용되므로, 생물의 분류학 등과는 관련이 없다.

해설: 푸리에 급수는 전기 회로, 통신, 음향 처리, 기계 진동 분석 등 기술적인 분야에서 사용된다. 반면 생물학적인 개체 분류와는 관련이 없다.

정답: 생물의 분류