

라플라스 변환 초급 문제 20제

문제 1. 다음은 RLC 직렬 회로이다. 저항 $R = 1\Omega$, 인덕턴스 $L = 1\text{H}$, 커패시턴스 $C = 1\text{F}$, 입력 전압은 단위 계단 함수 $u(t)$ 이다. 1) 라플라스 영역에서 임피던스를 구하시오. 2) 입력 전압의 라플라스 변환을 구하시오. 3) 라플라스 영역에서 전류 $I(s)$ 를 구하시오. 4) 시간 영역에서 전류 $i(t)$ 를 구하시오.

풀이: 임피던스는 각 소자의 라플라스 임피던스를 더해 구한다.

$$Z(s) = R + sL + \frac{1}{sC} = 1 + s + \frac{1}{s}$$

단위 계단 함수의 라플라스 변환은

$$V(s) = \frac{1}{s}$$

전류는

$$I(s) = \frac{V(s)}{Z(s)} = \frac{1/s}{1 + s + \frac{1}{s}} = \frac{1}{s^2 + s + 1}$$

분모를 완전제곱식으로 변형하면

$$s^2 + s + 1 = \left(s + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$$

따라서 역변환 결과는

$$i(t) = \frac{2}{\sqrt{3}} e^{-\frac{t}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) u(t)$$

해설: 라플라스 변환을 이용하면 복잡한 미분방정식을 대수방정식으로 변환해 쉽게 해석 가능하다. 임피던스 공식은 소자별 임피던스를 합산하는 직렬회로의 기본 법칙을 따른다. 분모의 완전제곱식 변환은 표준 역변환 형태로 변환하는데 필수이다. 최종 시간 영역 해는 감쇠진동 형태임을 확인할 수 있다.

정답:

$$Z(s) = 1 + s + \frac{1}{s}, \quad V(s) = \frac{1}{s}, \quad I(s) = \frac{1}{s^2 + s + 1}, \quad i(t) = \frac{2}{\sqrt{3}} e^{-\frac{t}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) u(t)$$

문제 2. 함수 $f(t) = 1$ 의 라플라스 변환을 구하시오.

풀이: 정의에 따라

$$\mathcal{L}\{1\} = \int_0^\infty e^{-st} dt = \left[-\frac{1}{s} e^{-st}\right]_0^\infty = \frac{1}{s}$$

해설: 상수 함수의 라플라스 변환은 주파수 영역에서 $\frac{1}{s}$ 로 표현되어, 기본적인 변환 중 하나이다.

정답: $\frac{1}{s}$

문제 3. 함수 $f(t) = t$ 의 라플라스 변환을 구하시오.

풀이: 일반식에 의해

$$\mathcal{L}\{t\} = \frac{1}{s^2}$$

해설: t^n 함수의 라플라스 변환 공식 $\frac{n!}{s^{n+1}}$ 에 따라 $n = 1$ 일 때 결과가 나온다.

정답: $\frac{1}{s^2}$

문제 4. 함수 $f(t) = t^2$ 의 라플라스 변환을 구하시오.

풀이:

$$\mathcal{L}\{t^2\} = \frac{2}{s^3}$$

해설: 계승의 특성을 이용하여 $2! = 2$ 와 지수 표현 $s^{-(n+1)}$ 를 적용한다.

정답: $\frac{2}{s^3}$

문제 5. 함수 $f(t) = e^{2t}$ 의 라플라스 변환을 구하시오.

풀이: 지수 함수 공식에 따라

$$\mathcal{L}\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a} = \frac{1}{s-2}$$

해설: 지수 함수의 라플라스 변환은 변환변수 s 에서 a 만큼 평행이동한 형태이다.

정답: $\frac{1}{s-2}$

문제 6. 함수 $f(t) = \cos 3t$ 의 라플라스 변환을 구하시오.

풀이: 코사인 함수 변환 공식에 따라

$$\mathcal{L}\{\cos \omega t\} = \frac{s}{s^2 + \omega^2} = \frac{s}{s^2 + 9}$$

해설: 주파수 $\omega = 3$ 인 코사인 함수는 제곱합 형태 분모를 가진다.

정답: $\frac{s}{s^2+9}$

문제 7. 함수 $f(t) = \sin 4t$ 의 라플라스 변환을 구하시오.

풀이: 사인 함수 변환 공식에 따라

$$\mathcal{L}\{\sin \omega t\} = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} = \frac{4}{s^2 + 16}$$

해설: 사인 함수는 분자가 주파수이고 분모가 $s^2 + \omega^2$ 형태인 기본 변환이다.

정답: $\frac{4}{s^2+16}$

문제 8. 함수 $f(t) = u(t)$ (단위 계단 함수)의 라플라스 변환을 구하시오.

풀이: 단위 계단 함수는 1과 동일하므로

$$\mathcal{L}\{u(t)\} = \frac{1}{s}$$

해설: 라플라스 변환 정의에 따라 적분 결과가 $\frac{1}{s}$ 임을 확인할 수 있다.

정답: $\frac{1}{s}$

문제 9. 함수 $f(t) = \delta(t)$ (단위 임펄스 함수)의 라플라스 변환을 구하시오.

풀이: 단위 임펄스 함수는 모든 영역에서 0이고 $t = 0$ 에서 무한대이며 면적이 1이다. 따라서

$$\mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1$$

해설: 임펄스 함수는 신호처리 및 회로 해석에서 초기조건 표현에 자주 쓰인다.

정답: 1

문제 10. 함수 $f(t) = e^{-3t} \sin 2t$ 의 라플라스 변환을 구하시오.

풀이: 공식에 따라

$$\mathcal{L}\{e^{at} \sin \omega t\} = \frac{\omega}{(s-a)^2 + \omega^2}$$

여기서 $a = -3, \omega = 2$, 따라서

$$\mathcal{L}\{e^{-3t} \sin 2t\} = \frac{2}{(s+3)^2 + 4}$$

해설: 지수 감쇠가 포함된 사인파 신호는 변환 시 s 축이 이동된 형태를 가진다.

정답: $\frac{2}{(s+3)^2+4}$

문제 11. 함수 $f(t) = te^{2t}$ 의 라플라스 변환을 구하시오.

풀이: 공식

$$\mathcal{L}\{te^{at}\} = \frac{1}{(s-a)^2}$$

$a = 2$ 이므로

$$\frac{1}{(s-2)^2}$$

해설: t 와 지수함수 곱의 라플라스 변환은 분모가 제곱되는 특징이 있다.

정답: $\frac{1}{(s-2)^2}$

문제 12. 함수 $f(t) = \cosh 3t$ 의 라플라스 변환을 구하시오.

풀이:

$$\cosh at = \frac{e^{at} + e^{-at}}{2}$$

라플라스 변환은

$$\mathcal{L}\{\cosh at\} = \frac{s}{s^2 - a^2}$$

따라서 $a = 3$ 이므로

$$\frac{s}{s^2 - 9}$$

해설: 쌍곡선 코사인 함수는 두 지수함수 합으로 표현 가능하며, 변환 결과는 분모가 차 제곱 꼴이다.

정답: $\frac{s}{s^2-9}$

문제 13. 함수 $f(t) = \sinh 2t$ 의 라플라스 변환을 구하시오.

풀이:

$$\sinh at = \frac{e^{at} - e^{-at}}{2}$$

라플라스 변환 공식에 따라

$$\mathcal{L}\{\sinh at\} = \frac{a}{s^2 - a^2}$$

$a = 2$ 이므로

$$\frac{2}{s^2 - 4}$$

해설: 쌍곡선 사인 함수는 지수함수 차 형태이며 분자가 상수로 표현된다.

정답: $\frac{2}{s^2-4}$

문제 14. 커패시터의 라플라스 임피던스 공식을 쓰고, $C = 2\text{F}$ 일 때 임피던스를 구하시오.

풀이: 커패시터 임피던스는

$$Z_C(s) = \frac{1}{sC} = \frac{1}{2s}$$

해설: 커패시터는 주파수 영역에서 인덕터와 반대 개념으로 작용한다. 커패시턴스가 클수록 임피던스가 작다.

정답: $\frac{1}{2s}$

문제 15. 인덕터의 라플라스 임피던스 공식을 쓰고, $L = 3\text{H}$ 일 때 임피던스를 구하시오.

풀이: 인덕터 임피던스는

$$Z_L(s) = sL = 3s$$

해설: 인덕터 임피던스는 주파수에 비례한다. 인덕턴스가 클수록 임피던스가 커진다.

정답: $3s$

문제 16. 저항 $R = 5\Omega$ 의 임피던스를 라플라스 영역에서 구하시오.

풀이: 저항 임피던스는 주파수와 무관하며

$$Z_R = R = 5$$

해설: 저항은 시간 및 주파수 영역에서 동일한 값을 가진다.

정답: 5

문제 17. 직렬 연결된 저항 $R = 2\Omega$, 인덕터 $L = 1\text{H}$, 커패시터 $C = 0.5\text{F}$ 의 총 임피던스를 구하시오.

풀이: 임피던스는

$$Z = R + sL + \frac{1}{sC} = 2 + s + \frac{2}{s}$$

해설: 각 소자 임피던스 합산 공식에 따라 계산한다.

정답: $2 + s + \frac{2}{s}$

문제 18. 함수 $f(t) = e^{-t}$ 의 라플라스 변환을 구하시오.

풀이: 지수 함수 변환 공식

$$\frac{1}{s+1}$$

해설: 지수 감쇠 함수의 변환이다.

정답: $\frac{1}{s+1}$

문제 19. 함수 $f(t) = t^3$ 의 라플라스 변환을 구하시오.

풀이:

$$\mathcal{L}\{t^3\} = \frac{3!}{s^4} = \frac{6}{s^4}$$

해설: $n = 3$ 일 때 라플라스 변환 공식 적용.

정답: $\frac{6}{s^4}$

문제 20. 함수 $f(t) = \sin 5t$ 의 라플라스 변환을 구하시오.

풀이: 사인 함수 변환 공식

$$\frac{5}{s^2 + 25}$$

해설: 주파수 5의 사인 신호 변환 결과.

정답: $\frac{5}{s^2+25}$