보드선도 초급 문제 20제

1. 전달함수
$$H(s) = \frac{1}{s+1}$$
의 크기 보드선도를 그리시오.

풀이

주파수 응답은 $s = j\omega$ 대입하여
$$H(j\omega) = \frac{1}{j\omega+1}$$
복소수 크기는
$$|H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\omega^2+1}}$$
데시벨 단위로 변환하면
$$20\log_{10}|H(j\omega)| = -10\log_{10}(\omega^2+1)$$

해설

$\omega = 1$이 코너 주파수이며, $\omega \ll 1$에서 크기는 거의 0 dB이고, $\omega \gg 1$에서 크기는 -20 dB/decade 기울기로 감소합니다. 이는 기본 1차 저역통과 필터 특성입니다.

답

$$20\log_{10}|H(j\omega)| = -10\log_{10}(\omega^2+1)$$
주파수 $\omega = 1$에서 기울기가 변합니다.

2. 전달함수
$$H(s) = \frac{1}{s+10}$$
의 위상 보드선도를 그리시오.

풀이

주파수 응답은
$$H(j\omega) = \frac{1}{j\omega+10}$$
위상은
$$\angle H(j\omega) = -\tan^{-1}\frac{\omega}{10}$$

해설

$\omega \to 0$일 때 위상은 0도이고, $\omega \to \infty$일 때 위상은 -90도에 수렴합니다. 위상은 $\omega = 10$을 중심으로 -45도 부근에서 변화를 크게 보입니다.

답

$$\angle H(j\omega) = -\tan^{-1}\frac{\omega}{10}$$
이며, 위상은 0도에서 -90도까지 변화합니다.

3. 전달함수

$$H(s) = \frac{s}{s+1}$$

의 코너 주파수를 구하시오.

풀이

분자에 영점 $s=0$ 이 있고, 분모에 극점 $s=-1$ 이 있습니다. 각 코너 주파수는 극점 및 영점 절대값이며, 따라서 코너 주파수는 0 (영점)과 1 (극점)입니다.

해설

주파수 특성은 영점과 극점이 영향을 주므로, 영점 0에서는 즉각 영향을 주지 않고, 극점 1에서 주파수 변화가 시작됩니다.

답

코너 주파수는 $\omega = 0$ (영점), $\omega = 1$ (극점)입니다.

4. 전달함수

$$H(s) = \frac{10}{s+10}$$

의 -3dB 주파수를 구하시오.

풀이

크기 응답은

$$|H(j\omega)| = \frac{10}{\sqrt{\omega^2+100}}$$

-3dB 점은 크기가 최대 크기의 $\frac{1}{\sqrt{2}}$배 되는 점입니다.

최대 크기는 $\omega = 0$일 때

$$|H(j0)| = \frac{10}{10} = 1$$

따라서

$$\frac{10}{\sqrt{\omega^2+100}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

양변 제곱 후 정리하면

$$\omega^2 + 100 = 200$$

$$\omega^2 = 100$$

$$\omega = 10$$

해설

-3dB 주파수는 코너 주파수와 일치하며, 여기서는 $\omega = 10$ rad/s 입니다.

답

-3dB 주파수는 $\boxed{10}$ rad/s 입니다.

5. 전달함수

$$H(s) = \frac{1}{s^2 + s + 1}$$

의 크기 보드선도 기울기를 $\omega \to \infty$에서 구하시오.

풀이

고주파 영역에서 $s = j\omega$, 분모는 ω^2에 의해 지배됩니다.

$$|H(j\omega)| \approx \frac{1}{\omega^2}$$

dB 단위로

$$20 \log_{10} |H(j\omega)| \approx 20 \log_{10} \omega^{-2} = -40 \log_{10} \omega$$

즉, 기울기는 -40 dB/decade 입니다.

해설

2차 전달함수는 고주파에서 기울기가 2배인 -40 dB/decade 를 나타냅니다.

답

기울기는 $\boxed{-40 \text{ dB/decade}}$ 입니다.

6. 전달함수

$$H(s) = \frac{1}{(s+1)(s+10)}$$

의 코너 주파수를 구하시오.

풀이

극점은 $s = -1$, $s = -10$ 입니다. 코너 주파수는 절대값이며, 따라서 $\omega = 1$, $\omega = 10$ 입니다.

해설

전달함수는 두 개 극점을 가지므로, 두 코너 주파수에서 기울기 변화가 발생합니다.

답

코너 주파수는 $\boxed{1, 10}$ rad/s 입니다.

7. 전달함수

$$H(s) = \frac{s+10}{s+1}$$

의 보드선도에서 위상 변화 방향은 증가인가 감소인가?

풀이

분자에 영점 $s = -10$, 분모에 극점 $s = -1$ 존재합니다.

영점은 위상을 +45도씩 증가시키고, 극점은 -45도씩 감소시킵니다.

해설

영점이 극점보다 높은 주파수에서 나타나므로, 초기에는 위상이 감소하다가 영점 이후 증가하는 경향을 보입니다.

답

위상 변화는 $\boxed{\text{초기 감소 후 증가}}$ 합니다.

8. 전달함수

$$H(s) = \frac{s}{s+10}$$

의 크기 보드선도에서 $\omega = 10$ 일 때 크기는 몇 dB인가?

풀이

$$|H(j\omega)| = \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 + 100}}$$

$\omega = 10$ 대입

$$|H(j10)| = \frac{10}{\sqrt{10^2 + 100}} = \frac{10}{\sqrt{200}} = \frac{10}{14.142} = 0.707$$

dB 변환

$$20 \log_{10} 0.707 = -3.01 \text{ dB}$$

해설

$\omega = 10$에서 크기가 -3 dB 임을 확인했습니다. 이는 코너 주파수 근처에서 필터가 신호를 절반 감쇠시키는 것을 의미합니다.

답

크기는 약 $\boxed{-3.01 \text{ dB}}$ 입니다.

9. 전달함수

$$H(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 2}$$

의 극점의 주파수를 구하시오.

풀이

극점은 방정식의 근으로 구합니다.

$$s^2 + 2s + 2 = 0$$

근의 공식 적용:

$$s = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \times 1 \times 2}}{2} = -1 \pm j$$

허수부 크기 $\omega_n = 1$이 자연진동 주파수이며, 이는 극점의 주파수입니다.

해설

허수부 크기가 시스템의 공진 주파수를 나타내므로, $\omega = 1$ rad/s 에서 공진 현상이 나타날 수 있습니다.

답

극점의 주파수는 $\boxed{1 \text{ rad/s}}$ 입니다.

10. 전달함수

$$H(s) = \frac{1}{s + 100}$$

의 크기 보드선도의 기울기를 서술하시오.

풀이
고주파 영역 ($\omega \gg 100$)에서 크기는

$$|H(j\omega)| \approx \frac{1}{\omega}$$

따라서 데시벨로는

$$20 \log_{10} |H(j\omega)| \approx -20 \log_{10} \omega$$

기울기는 -20 dB/decade 입니다.

해설
1차 극점이 있으므로, 고주파에서 신호가 -20 dB/decade로 감쇠합니다.

답
기울기는 $\boxed{-20 \text{ dB/decade}}$ 입니다.

11. 전달함수

$$H(s) = \frac{10}{s(s+1)}$$

의 크기 보드선도에서 $\omega = 1$ 일 때 크기를 구하시오.

풀이
주파수 응답

$$|H(j\omega)| = \frac{10}{\omega\sqrt{\omega^2 + 1}}$$

$\omega = 1$ 대입하면

$$|H(j1)| = \frac{10}{1 \times \sqrt{1+1}} = \frac{10}{\sqrt{2}} \approx 7.07$$

dB 변환

$$20 \log_{10} 7.07 \approx 20 \times 0.85 = 17.0 \text{ dB}$$

해설
저주파에서 크기가 커지다가, $\omega = 1$ 근처에서 감쇠가 시작됨을 알 수 있습니다.

답
크기는 약 $\boxed{17.0 \text{ dB}}$ 입니다.

12. 전달함수

$$H(s) = s + 1$$

의 위상 보드선도에서 $\omega \to 0$ 일 때 위상각을 구하시오.

풀이

$$H(j\omega) = j\omega + 1$$

$\omega \to 0$ 이므로

$$H(j0) = 1$$

위상각은 실수부만 있어

$$\angle H(j0) = 0^\circ$$

해설
저주파에서는 위상 변화가 없고 0도임을 의미합니다.

답
$\boxed{0^\circ}$ 입니다.

13. 전달함수

$$H(s) = \frac{s+5}{s+50}$$

의 크기 보드선도에서 코너 주파수를 구하시오.

풀이
영점은 $s = -5$, 극점은 $s = -50$ 이므로 코너 주파수는

$$\omega = 5, 50$$

입니다.

해설
두 코너 주파수에서 기울기가 변하며 각각 영점과 극점에 대응합니다.

답
$\boxed{5,\ 50}$ rad/s 입니다.

14. 전달함수

$$H(s) = \frac{1}{(s+1)^2}$$

의 크기 보드선도의 기울기는 몇 dB/decade인가?

풀이
극점이 2개 중첩되어 있으므로 기울기는

$$-20 \times 2 = -40 \text{ dB/decade}$$

입니다.

해설
2차 극점은 1차 극점의 두 배 기울기를 만듭니다.

답
기울기는 $\boxed{-40 \text{ dB/decade}}$ 입니다.

15. 전달함수

$$H(s) = \frac{s}{(s+1)(s+10)}$$

의 코너 주파수를 모두 구하시오.

풀이
영점: $s = 0$ (주파수 0), 극점: $s = -1$, $s = -10$ (주파수 1, 10) 따라서 코너 주파수는

$$0,\ 1,\ 10$$

입니다.

해설
0 주파수는 영점으로 특이하지만 일반적으로 기울기 변화에는 영향을 적게 줍니다.

답
$\boxed{0,\ 1,\ 10}$ rad/s 입니다.

16. 전달함수

$$H(s) = \frac{1}{s+5}$$

의 크기 보드선도에서 주파수 $\omega = 5$ 에서 크기를 계산하시오.

풀이

$$|H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\omega^2 + 25}}$$

$\omega = 5$ 대입

$$|H(j5)| = \frac{1}{\sqrt{25+25}} = \frac{1}{\sqrt{50}} \approx 0.1414$$

dB 변환

$$20 \log_{10} 0.1414 = 20 \times (-0.85) = -17.0 \text{ dB}$$

해설

코너 주파수에서 크기가 -3dB는 아니지만 크게 감소하는 경향을 나타냅니다.

답

크기는 약 $\boxed{-17.0 \text{ dB}}$ 입니다.

17. 전달함수

$$H(s) = \frac{1}{s^2 + 4s + 13}$$

의 대역폭을 추정하시오.

풀이

자연진동수는

$$\omega_n = \sqrt{13} \approx 3.6$$

감쇠비는

$$\zeta = \frac{4}{2 \times \omega_n} = \frac{4}{7.2} \approx 0.56$$

대역폭 BW 는

$$BW \approx \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2 + \sqrt{4\zeta^4 - 4\zeta^2 + 2}}$$

복잡하므로 약 $\boxed{4}$ rad/s 근처로 추정합니다.

해설

대역폭은 시스템의 응답 속도 및 주파수 특성 평가에 중요합니다.

답

대략 $\boxed{4}$ rad/s 입니다.

18. 전달함수

$$H(s) = \frac{s + 2}{s^2 + 2s + 2}$$

의 위상 보드선도 특성을 서술하시오.

풀이

영점 $s = -2$, 극점 $s = -1 \pm j$ 존재.

위상은 영점에서 +45도, 극점에서 -90도까지 변화 예상.

해설

초반에 위상이 약간 증가하다가 극점 영향으로 감소하는 형태로 나타납니다.

답

위상은 $\boxed{\text{초기 증가 후 감소}}$ 경향입니다.

19. 전달함수

$$H(s) = \frac{10(s+1)}{s(s+10)}$$

의 보드선도 기울기를 각 구간별로 분석하시오.

풀이

극점 $s = 0, -10$ 영점 $s = -1$

주파수 영역

- $\omega < 1$: 기울기 -20 dB/decade (영점 영향 없음)
- $1 < \omega < 10$: 기울기 0 dB/decade (영점과 극점 상쇄)
- $\omega > 10$: 기울기 -20 dB/decade

해설

영점과 극점이 주파수 구간별로 기울기를 변화시키는 효과를 가집니다.

답

기울기는 $\boxed{-20,\ 0,\ -20}$ dB/decade 로 구간별 변합니다.

20. 전달함수

$$H(s) = \frac{1}{s^3 + 3s^2 + 3s + 1}$$

의 저주파수 영역 크기 보드선도 특성을 설명하시오.

풀이

이 전달함수는 $(s+1)^3$의 전개형이며, 저주파($\omega \to 0$)에서는 크기가 1에 가깝습니다.

해설

저주파수에서 크기 변화가 적고, 고주파에서 급격한 감쇠가 나타납니다.

답

저주파수에서는 $\boxed{0\text{ dB}}$ 부근에서 평탄합니다.