초급 문제 20문제 - 주파수 응답 해석

문제 1
전달 함수

$$H(s) = \frac{1}{s+1}$$

에 대하여 주파수 $\omega = 1$ rad/s에서 크기 응답과 위상 응답을 구하시오.

풀이
주파수 응답은 $s = j\omega$를 대입하여 계산합니다.

$$H(j\omega) = \frac{1}{j\omega + 1}$$

따라서, $\omega = 1$일 때

$$H(j1) = \frac{1}{j1 + 1}$$

복소수 분모의 크기와 위상을 구합니다.

$$|j1 + 1| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$\angle(j1 + 1) = \tan^{-1}\left(\frac{1}{1}\right) = 45^\circ$$

출력 크기는 분모의 역수이므로

$$|H(j1)| = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0.707$$

출력 위상은 분모 각도의 역수이므로

$$\angle H(j1) = -45^\circ$$

해설
주파수 응답은 s 대신 $j\omega$를 넣어 시스템 응답을 복소수로 표현합니다. 크기는 복소수 벡터의 길이이고, 위상은 각도입니다. 1차 저역통과 필터의 기본적인 응답 특성을 확인하는 문제입니다.

답

$$|H(j1)| \approx 0.707, \quad \angle H(j1) = -45^\circ$$

문제 2
전달 함수

$$H(s) = \frac{10}{s+10}$$

의 차단 주파수(cutoff frequency)를 구하시오.

풀이
저역통과 필터의 차단 주파수는 분모의 상수와 같습니다. 일반식:

$$H(s) = \frac{\omega_c}{s + \omega_c}$$

여기서 $\omega_c = 10$ rad/s입니다.
따라서 차단 주파수는

$$\omega_c = 10\,\text{rad/s}$$

입니다.

해설
차단 주파수는 출력 크기가 입력 크기의 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (약 -3 dB)로 떨어지는 주파수를 말합니다. 이 문제는 전달 함수에 이미 차단 주파수가 주어진 형태로 되어 있어 바로 알 수 있습니다.

답

$$\omega_c = 10\,\text{rad/s}$$

문제 3
전달 함수

$$H(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 2}$$

에 대해 $\omega = 1$ rad/s에서 크기 응답과 위상 응답을 구하시오.

풀이
먼저, $s = j\omega = j1$를 대입합니다.

$$H(j1) = \frac{1}{(j1)^2 + 2(j1) + 2} = \frac{1}{-1 + 2j + 2} = \frac{1}{1 + 2j}$$

분모의 크기:

$$|1 + 2j| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5} \approx 2.236$$

분모의 위상:

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{2}{1}\right) = \tan^{-1}(2) \approx 63.43^\circ$$

출력 크기는 분모의 역수입니다.

$$|H(j1)| = \frac{1}{2.236} \approx 0.447$$

출력 위상은 분모 각도의 역수이므로

$$\angle H(j1) = -63.43^\circ$$

해설
2차 시스템은 s^2 항이 포함되어 복잡해 보이나, 주파수 응답은 동일하게 $s = j\omega$를 대입하여 구합니다. 분모가 복소수일 때 크기와 위상을 구하는 방법이 핵심입니다.

답

$$|H(j1)| \approx 0.447, \quad \angle H(j1) = -63.43^\circ$$

문제 4

전달 함수

$$H(s) = \frac{s}{s+1}$$

에 대하여 $\omega = 1$ rad/s에서 크기 및 위상 응답을 구하시오.

풀이
$s = j\omega = j1$ 대입:

$$H(j1) = \frac{j1}{j1+1}$$

분자 크기:

$$|j1| = 1$$

분자 위상:

$$\angle(j1) = 90^\circ$$

분모 크기:

$$|j1+1| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2} \approx 1.414$$

분모 위상:

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{1}{1}\right) = 45^\circ$$

전체 크기:

$$|H(j1)| = \frac{1}{1.414} \approx 0.707$$

전체 위상:

$$\angle H(j1) = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$$

해설
분자가 s인 전달 함수는 고역통과 필터 특성을 갖습니다. 분자와 분모 각각의 크기와 위상을 구하고 빼주면 전체 주파수 응답이 됩니다.

답

$$|H(j1)| \approx 0.707, \quad \angle H(j1) = 45^\circ$$

문제 5
전달 함수

$$H(s) = \frac{100}{s^2+10s+100}$$

에 대해 $\omega = 10$ rad/s에서 크기 응답과 위상 응답을 구하시오.

풀이
$s = j\omega = j10$ 대입:

$$H(j10) = \frac{100}{(j10)^2+10(j10)+100} = \frac{100}{-100+100j+100} = \frac{100}{100j}$$

분모 크기:

$$|100j| = 100$$

분모 위상:

$$\angle 100j = 90^\circ$$

크기:

$$|H(j10)| = \frac{100}{100} = 1$$

위상:

$$\angle H(j10) = -90^\circ$$

해설
분모의 실수부가 사라지는 주파수에서 순수 허수 임을 이용해 쉽게 계산할 수 있습니다. 주파수 응답의 위상은 분모 위상의 역수입니다.

답

$$|H(j10)| = 1, \quad \angle H(j10) = -90^\circ$$

문제 6
전달 함수

$$H(s) = \frac{s+5}{s+10}$$

에 대하여 $\omega = 5$ rad/s에서 크기 응답과 위상 응답을 구하시오.

풀이
먼저 $s = j\omega = j5$를 대입합니다.

$$H(j5) = \frac{j5+5}{j5+10}$$

분자:

$$|j5+5| = \sqrt{5^2+5^2} = \sqrt{50} \approx 7.07$$

$$\angle(j5+5) = \tan^{-1}\left(\frac{5}{5}\right) = 45^\circ$$

분모:

$$|j5+10| = \sqrt{10^2+5^2} = \sqrt{125} \approx 11.18$$

$$\angle(j5+10) = \tan^{-1}\left(\frac{5}{10}\right) = 26.57^\circ$$

전체 크기:

$$|H(j5)| = \frac{7.07}{11.18} \approx 0.63$$

전체 위상:

$$\angle H(j5) = 45^\circ - 26.57^\circ = 18.43^\circ$$

해설
분자와 분모의 크기와 위상을 각각 구해 주파수 응답의 크기와 위상을 구하는 기본 방법을 적용했습니다. 이 문제는 복소수 덧셈과 기하학적 해석 능력을 키우기에 적합합니다.

답

$$|H(j5)| \approx 0.63, \quad \angle H(j5) \approx 18.43^\circ$$

문제 7
전달 함수

$$H(s) = \frac{1}{(s+1)^2}$$

에 대해 $\omega = 1$ rad/s에서 크기와 위상 응답을 구하시오.

풀이
주파수 응답은

$$H(j\omega) = \frac{1}{(j\omega+1)^2}$$

따라서

$$H(j1) = \frac{1}{(j1+1)^2}$$

먼저 $j1+1$의 크기와 위상을 구합니다.

$$|j1+1| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2} \approx 1.414$$

$$\angle(j1+1) = 45^\circ$$

제곱이므로
크기:

$$|H(j1)| = \frac{1}{(1.414)^2} = \frac{1}{2} = 0.5$$

위상:

$$\angle H(j1) = -2 \times 45^\circ = -90^\circ$$

해설
복소수의 거듭제곱은 크기 제곱과 위상 각도의 배수로 계산합니다. 2차 시스템 응답 해석에 자주 쓰이는 방법입니다.

답

$$|H(j1)| = 0.5, \quad \angle H(j1) = -90^\circ$$

문제 8
전달 함수

$$H(s) = \frac{s}{s^2 + s + 1}$$

에 대해 $\omega = 1$ rad/s에서 크기와 위상 응답을 구하시오.

풀이
먼저 $s = j1$ 대입:

$$H(j1) = \frac{j1}{(j1)^2 + j1 + 1} = \frac{j1}{-1 + j1 + 1} = \frac{j1}{j1}$$

분모와 분자가 같으므로,

$$H(j1) = 1$$

크기:

$$|H(j1)| = 1$$

위상:

$$\angle H(j1) = 0^\circ$$

해설
이 경우 분자와 분모가 동일한 복소수이므로 응답은 1, 위상은 0이 됩니다. 특정 주파수에서의 주파수 응답 간단 계산법을 보여주는 문제입니다.

답

$$|H(j1)| = 1, \quad \angle H(j1) = 0^\circ$$

문제 9
전달 함수

$$H(s) = \frac{1}{s^2 + 4s + 13}$$

에 대해 $\omega = 2$ rad/s에서 크기 응답과 위상 응답을 구하시오.

풀이
$s = j2$ 대입:

$$H(j2) = \frac{1}{(j2)^2 + 4(j2) + 13} = \frac{1}{-4 + j8 + 13} = \frac{1}{9 + j8}$$

분모 크기:

$$|9 + j8| = \sqrt{9^2 + 8^2} = \sqrt{81 + 64} = \sqrt{145} \approx 12.04$$

분모 위상:

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{8}{9}\right) \approx 41.19^\circ$$

출력 크기:

$$|H(j2)| = \frac{1}{12.04} \approx 0.083$$

출력 위상:

$$\angle H(j2) = -41.19^\circ$$

해설
복잡한 2차 다항식 분모에서도 동일한 방법으로 크기와 위상을 계산합니다. 크기가 매우 작아 필터가 강하게 감쇠함을 알 수 있습니다.

답

$$|H(j2)| \approx 0.083, \quad \angle H(j2) = -41.19^\circ$$

문제 10
전달 함수

$$H(s) = \frac{5s}{s^2 + 6s + 25}$$

에 대해 $\omega = 3$ rad/s에서 크기 및 위상 응답을 구하시오.

풀이
$s = j3$ 대입:
분자:

$$5j3 = j15$$

크기:

$$|j15| = 15$$

위상:

$$90^\circ$$

분모:

$$(j3)^2 + 6(j3) + 25 = -9 + j18 + 25 = 16 + j18$$

분모 크기:

$$\sqrt{16^2 + 18^2} = \sqrt{256 + 324} = \sqrt{580} \approx 24.08$$

분모 위상:

$$\tan^{-1}\left(\frac{18}{16}\right) = \tan^{-1}(1.125) \approx 48.37^\circ$$

전체 크기:

$$|H(j3)| = \frac{15}{24.08} \approx 0.623$$

전체 위상:

$$\angle H(j3) = 90^\circ - 48.37^\circ = 41.63^\circ$$

해설
분자와 분모 모두 복소수일 때, 각각 크기와 위상을 구한 후 나누고 빼는 방법을 사용합니다. 고차 시스템 주파수 응답 분석의 기초 문제입니다.

답

$$|H(j3)| \approx 0.623, \quad \angle H(j3) \approx 41.63^\circ$$

문제 11
전달 함수

$$H(s) = \frac{1}{s+5}$$

에 대하여 $\omega = 5$ rad/s에서 크기 및 위상 응답을 구하시오.

풀이
주파수 응답은 $s = j\omega = j5$를 대입합니다.

$$H(j5) = \frac{1}{j5+5}$$

분모 크기:

$$|j5+5| = \sqrt{5^2+5^2} = \sqrt{50} \approx 7.07$$

분모 위상:

$$\tan^{-1}\left(\frac{5}{5}\right) = 45^\circ$$

크기:

$$|H(j5)| = \frac{1}{7.07} \approx 0.141$$

위상:

$$\angle H(j5) = -45^\circ$$

해설
복소수 분모의 크기와 위상을 구해 크기 응답과 위상 응답을 쉽게 산출할 수 있습니다.

답

$$|H(j5)| \approx 0.141, \quad \angle H(j5) = -45^\circ$$

문제 12
전달 함수

$$H(s) = \frac{s+2}{s+4}$$

에 대해 $\omega = 2$ rad/s에서 크기 및 위상 응답을 구하시오.

풀이
$s = j2$ 대입:

$$H(j2) = \frac{j2+2}{j2+4}$$

분자 크기:

$$|j2+2| = \sqrt{2^2+2^2} = \sqrt{8} \approx 2.828$$

분자 위상:

$$\tan^{-1}\left(\frac{2}{2}\right) = 45^\circ$$

분모 크기:

$$|j2+4| = \sqrt{4^2+2^2} = \sqrt{20} \approx 4.472$$

분모 위상:

$$\tan^{-1}\left(\frac{2}{4}\right) = 26.57^\circ$$

전체 크기:

$$|H(j2)| = \frac{2.828}{4.472} \approx 0.632$$

전체 위상:

$$\angle H(j2) = 45^\circ - 26.57^\circ = 18.43^\circ$$

해설
분자와 분모 각각의 크기와 위상을 구하고 빼는 과정은 주파수 응답 해석의 기본입니다.

답

$$|H(j2)| \approx 0.632, \quad \angle H(j2) \approx 18.43^\circ$$

문제 13
전달 함수

$$H(s) = \frac{10}{s^2+6s+10}$$

에 대해 $\omega = 1$ rad/s에서 크기 및 위상 응답을 구하시오.

풀이
$s = j1$ 대입:

$$H(j1) = \frac{10}{(j1)^2+6(j1)+10} = \frac{10}{-1+6j+10} = \frac{10}{9+6j}$$

분모 크기:

$$\sqrt{9^2+6^2} = \sqrt{81+36} = \sqrt{117} \approx 10.82$$

분모 위상:

$$\tan^{-1}\left(\frac{6}{9}\right) = \tan^{-1}(0.6667) \approx 33.69^\circ$$

크기:

$$|H(j1)| = \frac{10}{10.82} \approx 0.924$$

위상:

$$\angle H(j1) = -33.69^\circ$$

해설
2차 시스템의 주파수 응답을 구할 때도 동일하게 분모의 크기와 위상을 구하면 됩니다.

답

$$|H(j1)| \approx 0.924, \quad \angle H(j1) = -33.69^\circ$$

문제 14
전달 함수

$$H(s) = \frac{s+1}{s^2+2s+2}$$

에 대해 $\omega = 1$ rad/s에서 크기 및 위상 응답을 구하시오.

풀이
$s = j1$ 대입:
분자:

$$j1 + 1 = 1 + j1$$

분자 크기:

$$\sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \approx 1.414$$

분자 위상:

$$\tan^{-1}\left(\frac{1}{1}\right) = 45^\circ$$

분모:

$$(j1)^2 + 2(j1) + 2 = -1 + 2j + 2 = 1 + 2j$$

분모 크기:

$$\sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5} \approx 2.236$$

분모 위상:

$$\tan^{-1}\left(\frac{2}{1}\right) = 63.43^\circ$$

전체 크기:

$$|H(j1)| = \frac{1.414}{2.236} \approx 0.633$$

전체 위상:

$$\angle H(j1) = 45^\circ - 63.43^\circ = -18.43^\circ$$

해설
분자와 분모의 복소수 계산 후 크기와 위상을 구하는 절차를 보여줍니다.

답

$$|H(j1)| \approx 0.633, \quad \angle H(j1) \approx -18.43^\circ$$

문제 15
전달 함수

$$H(s) = \frac{100}{s^2 + 20s + 100}$$

에 대해 $\omega = 10$ rad/s에서 크기 및 위상 응답을 구하시오.

풀이
$s = j10$ 대입:

$$H(j10) = \frac{100}{(j10)^2 + 20(j10) + 100} = \frac{100}{-100 + 200j + 100} = \frac{100}{200j}$$

분모 크기:

$$|200j| = 200$$

분모 위상:

$$90^\circ$$

크기:

$$|H(j10)| = \frac{100}{200} = 0.5$$

위상:

$$\angle H(j10) = -90^\circ$$

해설
특정 주파수에서 실수부가 0이 되면 분모는 순수 허수로 나타나며 위상이 90도입니다.

답

$$|H(j10)| = 0.5, \quad \angle H(j10) = -90^\circ$$

문제 16
전달 함수

$$H(s) = \frac{s}{s^2 + 3s + 2}$$

에 대해 $\omega = 1$ rad/s에서 크기 및 위상 응답을 구하시오.

풀이
$s = j1$ 대입:
분자:

$$j1$$

크기:

$$1$$

위상:

$$90^\circ$$

분모:

$$(j1)^2 + 3(j1) + 2 = -1 + 3j + 2 = 1 + 3j$$

분모 크기:

$$\sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10} \approx 3.162$$

분모 위상:

$$\tan^{-1}\left(\frac{3}{1}\right) = 71.57^\circ$$

전체 크기:

$$|H(j1)| = \frac{1}{3.162} \approx 0.316$$

전체 위상:

$$90^\circ - 71.57^\circ = 18.43^\circ$$

해설
분자와 분모 크기 및 위상 차를 계산하는 표준 문제입니다.

답

$$|H(j1)| \approx 0.316, \quad \angle H(j1) \approx 18.43^\circ$$

문제 17
전달 함수

$$H(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 10}$$

에 대해 $\omega = 3$ rad/s에서 크기 및 위상 응답을 구하시오.

풀이
$s = j3$ 대입:

$$H(j3) = \frac{1}{(j3)^2 + 2(j3) + 10} = \frac{1}{-9 + 6j + 10} = \frac{1}{1 + 6j}$$

분모 크기:

$$\sqrt{1^2 + 6^2} = \sqrt{37} \approx 6.082$$

분모 위상:

$$\tan^{-1}\left(\frac{6}{1}\right) = 80.54^\circ$$

크기:

$$|H(j3)| = \frac{1}{6.082} \approx 0.164$$

위상:

$$\angle H(j3) = -80.54^\circ$$

해설
고차 다항식 분모에서도 크기와 위상 계산법은 동일합니다.

답

$$|H(j3)| \approx 0.164, \quad \angle H(j3) = -80.54^\circ$$

문제 18
전달 함수

$$H(s) = \frac{5}{s+5}$$

에 대해 $\omega = 5$ rad/s에서 크기 및 위상 응답을 구하시오.

풀이
$s = j5$ 대입:

$$H(j5) = \frac{5}{j5+5}$$

분모 크기:

$$\sqrt{5^2+5^2} = \sqrt{50} \approx 7.07$$

분모 위상:

$$45^\circ$$

크기:

$$|H(j5)| = \frac{5}{7.07} \approx 0.707$$

위상:

$$-45^\circ$$

해설
상수 배수를 포함한 1차 시스템의 주파수 응답입니다.

답

$$|H(j5)| \approx 0.707, \quad \angle H(j5) = -45^\circ$$

문제 19
전달 함수

$$H(s) = \frac{s+3}{s^2+4s+13}$$

에 대해 $\omega = 2$ rad/s에서 크기 및 위상 응답을 구하시오.

풀이
$s = j2$ 대입:
분자:

$$j2 + 3 = 3 + j2$$

크기:

$$\sqrt{3^2+2^2} = \sqrt{13} \approx 3.606$$

위상:

$$\tan^{-1}\left(\frac{2}{3}\right) = 33.69^\circ$$

분모:

$$(j2)^2 + 4(j2) + 13 = -4 + 8j + 13 = 9 + 8j$$

크기:

$$\sqrt{9^2+8^2} = \sqrt{81+64} = \sqrt{145} \approx 12.04$$

위상:

$$\tan^{-1}\left(\frac{8}{9}\right) = 41.19^\circ$$

전체 크기:

$$\frac{3.606}{12.04} \approx 0.299$$

전체 위상:

$$33.69^\circ - 41.19^\circ = -7.5^\circ$$

해설
복소수의 분자와 분모 모두 복잡한 경우에도 동일한 방법 적용 가능합니다.

답

$$|H(j2)| \approx 0.299, \quad \angle H(j2) \approx -7.5^\circ$$

문제 20
전달 함수

$$H(s) = \frac{1}{s^2+5s+6}$$

에 대해 $\omega = 1$ rad/s에서 크기 및 위상 응답을 구하시오.

풀이
$s = j1$ 대입:

$$H(j1) = \frac{1}{(j1)^2 + 5(j1) + 6} = \frac{1}{-1 + 5j + 6} = \frac{1}{5 + 5j}$$

분모 크기:

$$\sqrt{5^2 + 5^2} = \sqrt{50} \approx 7.07$$

분모 위상:

$$\tan^{-1}\left(\frac{5}{5}\right) = 45^\circ$$

크기:

$$|H(j1)| = \frac{1}{7.07} \approx 0.141$$

위상:

$$\angle H(j1) = -45^\circ$$

해설
2차 시스템의 기본적인 주파수 응답 계산 문제입니다.

답

$$|H(j1)| \approx 0.141, \quad \angle H(j1) = -45^\circ$$