

푸리에 해석 중급 문제 20제

1. 다음 함수의 푸리에 급수에서 a_0 값을 구하시오.

$$f(t) = \begin{cases} 1 & -\pi < t < 0 \\ -1 & 0 < t < \pi \end{cases}$$

(단, $f(t)$ 는 2π 주기를 갖는 주기 함수이다.)

풀이: a_0 는 다음과 같이 계산된다.

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt = \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^0 1 dt + \int_0^{\pi} (-1) dt \right) = \frac{1}{\pi} (\pi - \pi) = 0$$

해설: a_0 은 함수의 평균값을 의미한다. 주기 구간 전체에서 양의 영역과 음의 영역이 대칭적으로 분포되어 있으므로 전체 평균은 0이 된다.

정답: 0

2. 다음 함수의 푸리에 계수 a_n 을 구하시오.

$$f(t) = t \quad \text{for } -\pi < t < \pi, \text{ 주기 } 2\pi$$

풀이:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t \cos(nt) dt$$

이는 홀수 함수(t)와 짝수 함수($\cos(nt)$)의 곱으로 된 함수이므로 전체는 홀수 함수가 되어 대칭구간에서 적분하면 0이다.

$$a_n = 0$$

해설: 푸리에 급수에서 짝수 함수와 홀수 함수의 곱은 홀수 함수가 된다. 이를 $[-\pi, \pi]$ 대칭 구간에서 적분하면 항상 0이 된다. 따라서 a_n 은 0이 된다.

정답: 0

3. $f(t) = t$ 의 푸리에 급수 전개에서 b_n 을 구하시오. (단, $f(t)$ 는 2π 주기를 갖는 주기 함수로 한다.)

풀이:

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t \sin(nt) dt$$

부분적분을 사용하면 다음과 같다:

$$u = t, \quad dv = \sin(nt)dt \Rightarrow du = dt, \quad v = -\frac{\cos(nt)}{n}$$

$$b_n = \left[-\frac{t \cos(nt)}{n} \right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{n} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nt) dt$$

$$= 0 + \frac{1}{n} \cdot 0 = 0$$

계산해 보면 실제로

$$b_n = \frac{2(-1)^{n+1}}{n}$$

해설: $f(t) = t$ 는 홀수 함수이므로, 푸리에 급수 전개에서 짝수 항(a_n)은 모두 0이 되고, 홀수 항(b_n)만 남는다. 부분적분을 통해 계수를 직접 계산할 수 있다.

정답: $\frac{2(-1)^{n+1}}{n}$

4. 푸리에 급수 전개에서 위상(phase) 정보는 어떤 성분에서 확인할 수 있는가?

풀이: 푸리에 급수를 복소 지수 형태로 전개하면 다음과 같다.

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\omega_0 t}$$

이때 C_n 의 복소수 위상(angle)은 신호의 위상 정보를 담고 있다.

해설: 위상 정보는 계수의 복소수 형태에서 직접적으로 표현되며, 파형의 시간 지연 또는 대칭 성질에 영향을 미친다.

정답: 복소 계수 C_n 의 위상

5. $f(t)$ 가 실수 함수라면, 복소 푸리에 계수 C_n 과 C_{-n} 의 관계는?

풀이:

$$f(t) \in R \Rightarrow C_{-n} = \overline{C_n}$$

해설: 실수 함수의 푸리에 계수는 공액 대칭(conjugate symmetry)을 만족한다. 이는 푸리에 스펙트럼이 짝대칭이라는 의미로, 시간영역의 실수 성질이 주파수 영역에서 위상을 대칭적으로 만든다.

정답: $C_{-n} = \overline{C_n}$

6. 정현파 $x(t) = \cos(5t)$ 의 푸리에 변환은 어떤 형태인가?

풀이:

$$\cos(5t) = \frac{1}{2}(e^{j5t} + e^{-j5t})$$

따라서 푸리에 변환은 다음의 델타 함수로 표현된다.

$$X(\omega) = \pi[\delta(\omega - 5) + \delta(\omega + 5)]$$

해설: 정현파는 단일 주파수 성분을 가지므로 푸리에 변환 시 주파수축의 양쪽에 대칭적인 델타함수 쌍이 나타난다. 크기는 π 가 된다.

정답: $\pi[\delta(\omega - 5) + \delta(\omega + 5)]$

7. 다음 함수의 푸리에 급수에서 a_n 을 구하시오.

$$f(t) = \begin{cases} 0 & -\pi < t < 0 \\ 1 & 0 < t < \pi \end{cases}$$

($f(t)$ 는 2π 주기 함수)

풀이:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(nt) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(nt) dt = \frac{1}{\pi} \left[\frac{\sin(nt)}{n} \right]_0^{\pi} = 0$$

해설: 함수가 0인 구간과 1인 구간으로 나누어져 있으나, $\sin(n\pi) = 0$ 이므로 모든 a_n 이 0이다. 이는 코사인 계수가 모두 0임을 의미한다.

정답: 0

8. 위 함수의 b_n 을 구하시오.

풀이:

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(nt) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(nt) dt = \frac{1}{\pi} \left[-\frac{\cos(nt)}{n} \right]_0^{\pi} = \frac{1}{n\pi} (1 - (-1)^n)$$

해설: b_n 은 n 이 홀수일 때 $2/(n\pi)$, 짝수일 때 0이다. 이는 사인 계수가 홀수 차수에서만 존재한다는 뜻이다.

정답:

$$b_n = \begin{cases} \frac{2}{n\pi} & n \text{ 홀수} \\ 0 & n \text{ 짝수} \end{cases}$$

9. 푸리에 급수의 수렴에 관한 가이린 규칙(Gibbs phenomenon)이란 무엇인가?

풀이: 급격한 불연속점 근처에서 푸리에 급수가 진동하는 현상이다.

해설: 구형파 등 불연속 함수를 푸리에 급수로 근사할 때, 함수의 점근선 근처에서 과도하게 진동하는 현상이 나타난다. 이 현상은 진동의 폭이 줄어들지 않고 항상 일정한 크기를 유지하여 완전한 수렴을 방해한다.

정답: 불연속점 근처 진동 현상

10. $f(t) = \cos^2(t)$ 의 푸리에 급수 전개 시, 주기와 주요 주파수 성분은?

풀이: 삼각함수 항등식 이용:

$$\cos^2(t) = \frac{1 + \cos(2t)}{2}$$

주기는 2π , 주요 주파수는 0 (DC)와 2이다.

해설: 제공된 코사인 함수는 원래 주파수의 2배 성분과 DC 성분으로 분해된다. 이를 통해 푸리에 급수는 주파수 성분을 분석하는 데 유용함을 알 수 있다.

정답: 주기 2π , 주파수 0와 2

11. 푸리에 변환과 푸리에 급수의 차이점은 무엇인가?

풀이: 푸리에 급수는 주기 함수에 적용되고, 푸리에 변환은 비주기 함수 또는 신호에 적용된다.

해설: 푸리에 급수는 주기가 있는 함수만 표현 가능하지만, 푸리에 변환은 시간축 전체에 정의된 비주기 신호의 주파수 성분을 분석할 수 있다. 두 방법 모두 주파수 해석에 사용되지만 적용 대상이 다르다.

정답: 푸리에 급수는 주기 함수, 푸리에 변환은 비주기 함수에 적용

12. 직사각파를 푸리에 급수로 근사할 때 홀수 고조파가 포함되는 이유는?

풀이: 직사각파는 홀수 함수 성질과 주기성 때문에 홀수 배수 주파수(홀수 고조파)만 나타난다.

해설: 직사각파는 기본 주파수의 홀수 배수 성분들로 구성되며, 짝수 고조파 성분은 존재하지 않는다. 이는 직사각파의 대칭성 및 함수 형태에 따른 결과이다.

정답: 함수의 대칭성으로 인해 홀수 고조파만 존재

13. 푸리에 급수의 수렴 조건 중 가장 중요한 것은?

풀이: 함수가 유한 개의 불연속점과 극값을 가지고 적분 가능해야 한다.

해설: 디리클레 조건은 푸리에 급수의 수렴을 보장하기 위한 최소한의 조건으로, 함수가 너무 복잡하거나 무한대로 발산하지 않아야 한다.

정답: 디리클레 조건 충족

14. 푸리에 변환의 역변환 공식은 무엇인가?

풀이:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

해설: 푸리에 변환된 신호 $F(\omega)$ 를 다시 시간 도메인 신호로 복원하는 수식이다. 변환과 역변환이 모두 존재해야 하며 신호가 적분 가능해야 한다.

정답: 위 공식

15. 푸리에 급수에서 직류(DC) 성분을 없애려면 어떤 계수를 0으로 만들어야 하는가?

풀이: a_0 계수를 0으로 만든다.

해설: a_0 은 함수의 평균값으로, 이를 0으로 설정하면 신호의 직류 성분이 제거된다. 이는 교류 신호만 분석하거나 처리할 때 중요하다.

정답: a_0

16. $f(t) = e^{-|t|}$ 함수의 푸리에 변환은?

풀이:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|t|} e^{-j\omega t} dt = \frac{2}{1 + \omega^2}$$

해설: $e^{-|t|}$ 는 실수 시간 축에서 절대값 감쇠 함수로, 푸리에 변환은 Lorentzian 형태로 주파수 도메인에서 나타난다.

정답: $\frac{2}{1 + \omega^2}$

17. 푸리에 급수에서 고조파의 진폭이 0에 수렴하면 어떤 의미인가?

풀이: 고조파 영향이 줄어들어 원래 신호와 근사도가 높아짐을 의미한다.

해설: 고조파가 사라지면 기본 주파수 성분만 남게 되어 신호가 단순해진다. 일반적으로 고조파 진폭이 작아지면 신호가 더 부드럽고 단순해진다.

정답: 원래 신호에 근접함

18. 푸리에 급수의 직교성 원리는 무엇인가?

풀이: 서로 다른 주파수의 사인, 코사인 함수는 구간 내 적분 시 0이 된다.

해설: 직교성은 각 주파수 성분들이 독립적임을 의미하며, 이를 통해 각 성분 계수를 독립적으로 구할 수 있다.

정답: 주파수별 함수들이 서로 직교함

19. 푸리에 변환에서 시간 이동이 주파수 영역에 미치는 영향은?

풀이: 시간 이동은 주파수 스펙트럼에 위상 변화를 일으킨다.

해설: 신호를 시간축에서 이동시키면, 주파수 도메인에서 복소 지수 위상이 곱해져 신호의 크기는 변하지 않지만 위상은 변한다.

정답: 위상 변동

20. 주기 함수 $f(t)$ 의 푸리에 급수 표현에서 주파수 성분이 0이 아닌 최소 주파수를 무엇이라 하는가?

풀이: 기본 주파수 또는 기본 각주파수라 한다.

해설: 함수가 반복되는 최소 주파수 성분으로, 전체 스펙트럼이 이 기본 주파수의 정수배들로 구성된다.

정답: 기본 주파수

21. 푸리에 급수를 이용해 신호를 분해할 때, 고조파의 개수를 늘리면 무엇이 개선되는가?

풀이: 원래 신호의 근사 정확도가 높아진다.

해설: 고조파가 많을수록 신호의 세밀한 부분까지 표현할 수 있어 근사 오차가 감소한다.

정답: 근사 정확도 향상

22. 푸리에 변환의 주파수 해상도는 무엇에 의해 결정되는가?

풀이: 신호의 시간 길이에 의해 결정된다.

해설: 신호가 더 길게 측정될수록 주파수 간격이 더 세밀해져 해상도가 높아진다.

정답: 측정 시간 길이