

중급 문제 20문제 - 초기 조건 포함 해석

문제 1. 직렬 RLC 회로에서 저항 R , 인덕터 L , 축전기 C 가 연결되어 있고, 입력 전압이 0V입니다. 초기 조건으로 인덕터 전류 $i(0) = 1$ A, 축전기 전압 $v_C(0) = 10$ V가 주어질 때, 시간에 따른 회로 전류 $i(t)$ 를 구하시오.

풀이: 회로 미분방정식은 키르히호프 법칙에 따라 다음과 같습니다.

$$L \frac{d^2 i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} i = 0$$

초기 조건은 전류와 그 미분값이 필요합니다. 전류의 초기값은 $i(0) = 1$ A이며, 전류의 초기 도함수 $\frac{di}{dt}(0)$ 는 인덕터와 축전기의 초기 상태로부터 다음과 같이 구합니다.

인덕터 전압:

$$v_L = L \frac{di}{dt}$$

키르히호프 법칙에 따라:

$$v_L + v_R + v_C = 0$$

초기 시점에서:

$$L \frac{di}{dt}(0) + Ri(0) + v_C(0) = 0$$

따라서,

$$\frac{di}{dt}(0) = -\frac{Ri(0) + v_C(0)}{L} = -\frac{R \times 1 + 10}{L}$$

이제 2차 미분방정식을 초기조건과 함께 풀면, 일반해는 감쇠 진동 혹은 과도 지수 감소 형태가 됩니다. 특성방정식:

$$Ls^2 + Rs + \frac{1}{C} = 0$$

근을 구하여 케이스별 해를 구하고 초기 조건에 맞게 상수를 결정합니다.

해설: - 문제는 2차 선형 미분방정식 문제입니다. - 초기 조건이 전류와 미분 전류 모두 있어 해의 상수를 결정할 수 있습니다. - 회로의 감쇠, 진동 여부는 근의 판별식 $\Delta = R^2 - 4L/C$ 에 따라 달라집니다. - 실제로는 근이 실수이거나 복소수일 수 있으며, 각각 감쇠 진동 또는 과도 지수 감소 형태의 해를 가집니다. - 초기에 저장된 에너지가 어떻게 소멸되는지, 그리고 회로 전류가 시간이 지나면서 어떻게 변하는지 확인할 수 있습니다.

답: 근의 형태에 따라

$$i(t) = Ae^{s_1 t} + Be^{s_2 t}$$

이고, 초기 조건으로부터 A, B 를 구함. (상수 계산 생략)

문제 2. 단일 RC 회로에서 입력 전압이 5V 계단 함수로 인가되고, 축전기 초기 전압이 2V일 때, 축전기 전압 $v_C(t)$ 를 구하시오.

풀이: 미분방정식은

$$RC \frac{dv_C}{dt} + v_C = 5$$

초기 조건:

$$v_C(0) = 2$$

일차 상미분방정식으로 해는 다음과 같이 구합니다.

동차방정식 해:

$$v_h(t) = Ke^{-\frac{t}{RC}}$$

특수해는 상수해:

$$v_p = 5$$

전체 해는

$$v_C(t) = v_h(t) + v_p = Ke^{-\frac{t}{RC}} + 5$$

초기 조건을 대입하여 K 결정:

$$2 = K + 5 \implies K = -3$$

해설: - 초기 전압이 2V이므로, 회로는 2V 상태에서 출발해 5V로 충전됩니다. - 지수함수 형태의 과도응답으로 충전이 진행되며, 시간이 충분히 지나면 5V에 도달합니다. - 전압 변화의 속도는 RC 상수에 의해 결정됩니다.

답:

$$v_C(t) = 5 - 3e^{-\frac{t}{RC}}$$

문제 3. RL 회로에서 인덕터 초기 전류가 3A이고, 10V 직류 전압이 인가될 때 시간에 따른 인덕터 전류 $i_L(t)$ 를 구하시오.

풀이: 회로 미분방정식:

$$L \frac{di_L}{dt} + Ri_L = 10$$

초기 조건:

$$i_L(0) = 3$$

동차해:

$$i_h(t) = Ce^{-\frac{R}{L}t}$$

특수해: 상수해

$$i_p = \frac{10}{R}$$

전체 해:

$$i_L(t) = Ce^{-\frac{R}{L}t} + \frac{10}{R}$$

초기 조건 대입:

$$3 = C + \frac{10}{R} \implies C = 3 - \frac{10}{R}$$

해설: - 인덕터 전류가 3A에서 시작하여 입력에 의해 최종값 $10/R$ 으로 변화합니다. - 과도 응답은 지수 감쇠 함수 형태입니다. - 인덕터의 에너지 저장 특성과 저항에 의한 감쇠를 고려한 해입니다.

답:

$$i_L(t) = \left(3 - \frac{10}{R}\right)e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{10}{R}$$

문제 4. RLC 직렬 회로에서 입력 전압이 0V이고, 초기 전류 0A, 축전기 전압 12V일 때 시간에 따른 회로 전류 $i(t)$ 를 구하시오.

풀이: 회로 미분방정식:

$$L \frac{d^2i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{1}{C}i = 0$$

초기 조건:

$$i(0) = 0, \quad v_C(0) = \frac{1}{C} \int_0^0 i(\tau) d\tau = 12$$

또한, 인덕터 전압:

$$v_L = L \frac{di}{dt}$$

키르히호프 법칙 초기 시점:

$$L \frac{di}{dt}(0) + Ri(0) + v_C(0) = 0 \implies \frac{di}{dt}(0) = -\frac{v_C(0)}{L} = -\frac{12}{L}$$

2차 미분방정식에 초기 조건 적용 후 해를 구합니다.

해설: - 회로가 초기 축전기 에너지를 갖고 있어 자연 응답(무입력 응답) 상태입니다. - 해는 감쇠 진동 혹은 과도 지수 감소 형태입니다. - 초기 미분값을 포함한 초기 조건을 통해 상수를 결정해야 합니다.

답:

$$i(t) = Ae^{s_1 t} + Be^{s_2 t}$$

(상수 A, B 는 초기 조건으로 결정)

문제 5. 입력 전압이 단일 계단 함수이고, 축전기 초기 전압이 4V인 RC 회로에서 시간에 따른 축전기 전압을 구하시오.

풀이: 미분방정식:

$$RC \frac{dv_C}{dt} + v_C = V_{in}$$

초기 조건:

$$v_C(0) = 4$$

계단 입력 $V_{in} = V_0$ 이므로 특수해는 $v_p = V_0$.

전체 해:

$$v_C(t) = Ke^{-\frac{t}{RC}} + V_0$$

초기 조건으로

$$4 = K + V_0 \implies K = 4 - V_0$$

해설: - 축전기는 초기 4V 상태에서 시작하여 입력 전압에 도달하도록 충전합니다. - 지수 함수 형태의 과도응답으로 시간이 지남에 따라 평형상태가 됩니다.

답:

$$v_C(t) = V_0 + (4 - V_0)e^{-\frac{t}{RC}}$$

문제 6. RL 회로에서 인덕터 초기 전류가 2A이고, 입력 전압이 8V일 때 시간에 따른 인덕터 전류를 구하시오.

풀이: 미분방정식:

$$L \frac{di_L}{dt} + Ri_L = 8$$

초기 조건:

$$i_L(0) = 2$$

동차해와 특수해를 구해 전체 해 도출.

해설: - 인덕터는 2A에서 시작하여 입력 전압에 의해 새로운 평형값 $8/R$ 으로 증가합니다. - 시간에 따른 전류 변화는 지수적 과도응답으로 표현됩니다.

답:

$$i_L(t) = \left(2 - \frac{8}{R}\right)e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{8}{R}$$

문제 7. 직렬 RLC 회로에서 저항 10Ω , 인덕터 $1H$, 축전기 $0.01F$ 가 연결되어 있고, 초기 전류 $0A$, 축전기 전압 $5V$ 인 경우 자연 응답 전류를 구하시오.

풀이: 미분방정식:

$$L \frac{d^2 i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} i = 0$$

특성방정식:

$$s^2 + \frac{R}{L} s + \frac{1}{LC} = 0$$

값 대입:

$$s^2 + 10s + 100 = 0$$

판별식:

$$\Delta = 100 - 400 = -300 < 0$$

복소 근으로 감쇠 진동 응답. 초기 조건으로 상수 결정.

해설: - 근이 복소수이므로 감쇠 진동이 발생합니다. - 전류는 다음 형태:

$$i(t) = e^{-\alpha t} (A \cos \omega_d t + B \sin \omega_d t)$$

$$\alpha = \frac{R}{2L} = 5, \omega_d = \sqrt{\frac{1}{LC} - \alpha^2} = \sqrt{100 - 25} = \sqrt{75} \approx 8.66.$$

답:

$$i(t) = e^{-5t} (A \cos 8.66t + B \sin 8.66t)$$

A, B 는 초기조건으로 결정

문제 8. RC 회로에서 입력 전압 $12V$ 가 갑자기 인가되고 축전기 초기 전압 $6V$ 일 때, 시간에 따른 축전기 전압을 구하시오.

풀이: 미분방정식:

$$RC \frac{dv_C}{dt} + v_C = 12$$

초기 조건:

$$v_C(0) = 6$$

전체 해:

$$v_C(t) = K e^{-\frac{t}{RC}} + 12$$

초기 조건 대입:

$$6 = K + 12 \implies K = -6$$

해설: - 축전기는 $6V$ 에서 시작하여 $12V$ 로 충전됨 - 과도 응답은 지수 함수 형태

답:

$$v_C(t) = 12 - 6e^{-\frac{t}{RC}}$$

문제 9. RL 회로에서 인덕터 초기 전류 $0A$, 입력 $20V$ 직류 전압이 인가될 때 인덕터 전류를 구하시오. 저항은 5Ω , 인덕턴스는 $2H$.

풀이: 미분방정식:

$$2 \frac{di_L}{dt} + 5i_L = 20$$

초기 조건:

$$i_L(0) = 0$$

전체 해는:

$$i_L(t) = Ke^{-\frac{5}{2}t} + \frac{20}{5} = Ke^{-2.5t} + 4$$

초기 조건에서:

$$0 = K + 4 \implies K = -4$$

해설: - 전류는 0에서 4A로 증가하며 지수 함수적으로 변화합니다.

답:

$$i_L(t) = 4(1 - e^{-2.5t})$$

문제 10. RLC 직렬 회로에서 $R = 20\Omega$, $L = 1H$, $C = 0.002F$, 입력 0V, 초기 전류 0A, 초기 축전기 전압 50V 일 때 자연 응답 전류 구하기.

풀이: 특성방정식:

$$s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC} = 0 \implies s^2 + 20s + 500 = 0$$

판별식:

$$\Delta = 400 - 2000 = -1600 < 0$$

복소수 근:

$$s = -10 \pm j30$$

자연 응답:

$$i(t) = e^{-10t}(A \cos 30t + B \sin 30t)$$

초기 조건 이용해 A, B 구함.

해설: - 감쇠 진동 형태 - 축전기 초기 전압이 높아 초기 에너지가 많음

답:

$$i(t) = e^{-10t}(A \cos 30t + B \sin 30t)$$

문제 11. RC 회로에서 입력 전압이 15V이고, 축전기 초기 전압이 0V인 경우 시간에 따른 전압 구하기.

풀이:

$$RC \frac{dv_C}{dt} + v_C = 15$$

초기 조건:

$$v_C(0) = 0$$

해는:

$$v_C(t) = 15 \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right)$$

해설: - 축전기 전압이 0에서 15V로 충전됨

답:

$$v_C(t) = 15 \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right)$$

문제 12. RL 회로에서 인덕터 초기 전류 5A, 입력 전압 0V, $R = 10\Omega$, $L = 0.5H$ 일 때 인덕터 전류를 구하시오.

풀이:

$$0.5 \frac{di_L}{dt} + 10i_L = 0$$

초기 조건:

$$i_L(0) = 5$$

해:

$$i_L(t) = 5e^{-\frac{10}{0.5}t} = 5e^{-20t}$$

해설: - 전류는 5A에서 0으로 지수적으로 감소함

답:

$$i_L(t) = 5e^{-20t}$$

문제 13. RLC 직렬회로에서 입력 전압 0V, 초기 전류 0, 축전기 전압 20V, $R = 5\Omega$, $L = 1H$, $C = 0.01F$ 일 때 전류 구하기.

풀이: 특성방정식:

$$s^2 + 5s + 100 = 0$$

판별식:

$$25 - 400 = -375 < 0$$

복소수 근:

$$s = -2.5 \pm j9.68$$

자연 응답:

$$i(t) = e^{-2.5t}(A \cos 9.68t + B \sin 9.68t)$$

초기 조건으로 상수 결정.

해설: - 감쇠 진동 형태 - 초기 에너지에 따른 전류 진동

답:

$$i(t) = e^{-2.5t}(A \cos 9.68t + B \sin 9.68t)$$

문제 14. RC 회로에서 입력 20V, 초기 축전기 전압 10V일 때 전압 변화 구하기.

풀이:

$$RC \frac{dv_C}{dt} + v_C = 20$$

초기 조건:

$$v_C(0) = 10$$

해:

$$v_C(t) = 20 + (10 - 20)e^{-\frac{t}{RC}} = 20 - 10e^{-\frac{t}{RC}}$$

해설: - 축전기가 10V에서 20V로 충전

답:

$$v_C(t) = 20 - 10e^{-\frac{t}{RC}}$$

문제 15. RL 회로, 초기 전류 0A, 입력 15V, $R = 3\Omega$, $L = 1H$ 일 때 전류 구하기.

풀이:

$$1 \frac{di_L}{dt} + 3i_L = 15$$

초기 조건:

$$i_L(0) = 0$$

해:

$$i_L(t) = 5(1 - e^{-3t})$$

해설: - 전류가 0에서 5A로 증가

답:

$$i_L(t) = 5(1 - e^{-3t})$$

문제 16. RLC 직렬회로, $R = 6\Omega$, $L = 2H$, $C = 0.001F$, 초기 전류 0A, 축전기 전압 15V, 입력 0V.

풀이: 특성방정식:

$$2s^2 + 6s + 1000 = 0 \implies s^2 + 3s + 500 = 0$$

판별식:

$$9 - 2000 = -1991 < 0$$

복소근:

$$s = -1.5 \pm j44.62$$

응답:

$$i(t) = e^{-1.5t}(A \cos 44.62t + B \sin 44.62t)$$

해설: - 강한 감쇠 진동 - 초기 조건으로 상수 결정

답:

$$i(t) = e^{-1.5t}(A \cos 44.62t + B \sin 44.62t)$$

문제 17. RC 회로에서 입력 전압 10V, 축전기 초기 전압 3V일 때 전압 구하기.

풀이:

$$RC \frac{dv_C}{dt} + v_C = 10$$

초기 조건:

$$v_C(0) = 3$$

해:

$$v_C(t) = 10 + (3 - 10)e^{-\frac{t}{RC}} = 10 - 7e^{-\frac{t}{RC}}$$

해설: - 축전기가 3V에서 10V로 상승

답:

$$v_C(t) = 10 - 7e^{-\frac{t}{RC}}$$

문제 18. RL 회로에서 인덕터 초기 전류 1A, 입력 6V, $R = 2\Omega$, $L = 0.5H$ 일 때 전류 구하기.

풀이:

$$0.5 \frac{di_L}{dt} + 2i_L = 6$$

초기 조건:

$$i_L(0) = 1$$

해:

$$i_L(t) = Ke^{-4t} + 3$$

초기 조건:

$$1 = K + 3 \implies K = -2$$

해설: - 전류는 1A에서 3A로 증가

답:

$$i_L(t) = 3 - 2e^{-4t}$$

문제 19. RLC 직렬회로, $R = 15 \Omega$, $L = 0.5 H$, $C = 0.002 F$, 초기 전류 0, 축전기 전압 30V, 입력 0V.

풀이: 특성방정식:

$$0.5s^2 + 15s + 500 = 0 \implies s^2 + 30s + 1000 = 0$$

판별식:

$$900 - 4000 = -3100 < 0$$

복소근:

$$s = -15 \pm j41.7$$

응답:

$$i(t) = e^{-15t}(A \cos 41.7t + B \sin 41.7t)$$

해설: - 매우 빠른 감쇠 진동 응답

답:

$$i(t) = e^{-15t}(A \cos 41.7t + B \sin 41.7t)$$

문제 20. RC 회로, 입력 25V, 축전기 초기 전압 5V일 때 전압 구하기.

풀이:

$$RC \frac{dv_C}{dt} + v_C = 25$$

초기 조건:

$$v_C(0) = 5$$

해:

$$v_C(t) = 25 + (5 - 25)e^{-\frac{t}{RC}} = 25 - 20e^{-\frac{t}{RC}}$$

해설: - 초기 5V에서 25V로 전압 상승

답:

$$v_C(t) = 25 - 20e^{-\frac{t}{RC}}$$