

보드선도 중급 문제 20제

1. 전달함수

$$H(s) = \frac{100(s+1)}{s(s+10)(s+100)}$$

의 크기 보드선도를 구간별로 분석하고 각 구간의 기울기를 서술하시오.

풀이

전달함수 극점과 영점 위치: - 영점: $s = -1$ (코너주파수 $\omega = 1$ rad/s) - 극점: $s = 0, -10, -100$ (코너주파수 각각 $\omega = 0, 10, 100$ rad/s)

크기 보드선도 기울기 초기값부터 시작:

- $\omega < 1$: 영점, 극점 모두 영향 없음, 극점 1개 (0주파수 극점)으로 인해 기울기 -20 dB/decade
- $1 \leq \omega < 10$: 영점 1개 추가되어 기울기 $-20 + 20 = 0$ dB/decade
- $10 \leq \omega < 100$: 극점 1개 추가되어 기울기 $0 - 20 = -20$ dB/decade
- $\omega \geq 100$: 극점 1개 추가되어 기울기 $-20 - 20 = -40$ dB/decade

해설

처음 극점 1개로 기울기가 -20 dB/decade로 시작하여, 영점에서 기울기가 $+20$ dB/decade 만큼 증가해 평탄해집니다. 이후 추가 극점들로 인해 기울기가 차례로 $-20, -40$ dB/decade 로 변화합니다. 각 구간은 코너주파수를 기준으로 변화하며, 이는 전달함수의 극점, 영점 개수와 위치에 따라 기울기가 결정되는 기본 원리입니다.

답

- $\omega < 1$: -20 dB/decade
- $1 \leq \omega < 10$: 0 dB/decade
- $10 \leq \omega < 100$: -20 dB/decade
- $\omega \geq 100$: -40 dB/decade

2. 전달함수

$$H(s) = \frac{s+10}{(s+1)(s+100)}$$

의 위상 보드선도를 구간별로 서술하고 위상 변화량을 계산하시오.

풀이

영점과 극점 코너주파수: - 영점: $s = -10, \omega = 10$ - 극점: $s = -1, s = -100, \omega = 1, \omega = 100$

각 코너주파수에서 위상 변화: - 영점에서 위상 $+90^\circ$ 증가 (1차 영점) - 극점에서 위상 -90° 감소 (1차 극점)

위상 변화 구간별:

- $\omega \ll 1$: 위상 0° 근처
- $1 \leq \omega < 10$: 극점(1) 영향으로 위상 -45° 까지 감소
- $10 \leq \omega < 100$: 영점(10) 영향으로 위상 증가, 약 -45° 에서 $+45^\circ$ 까지 상승
- $\omega \geq 100$: 극점(100) 영향으로 위상 다시 감소, 약 $+45^\circ$ 에서 0° 로 하락

해설

위상 보드선도는 영점과 극점의 위상 변화가 중첩되어 나타납니다. 영점은 위상을 증가시키고, 극점은 감소시키며, 코너주파수 근처에서 선형적으로 변화합니다. 이 문제는 영점과 극점들이 서로 다른 위치에 분포해 있어 위상이 처음에 감소했다가 다시 증가하고 마지막에 감소하는 복잡한 형태를 보입니다.

답

- $\omega < 1$: 약 0도
- $1 \leq \omega < 10$: 위상 감소 약 -45도
- $10 \leq \omega < 100$: 위상 증가 약 +45도
- $\omega \geq 100$: 위상 감소 0도 근처

3. 전달함수

$$H(s) = \frac{1}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

이때, $\zeta = 0.2$, $\omega_n = 10$ 일 때, 시스템의 공진 주파수와 공진 크기를 구하시오.

풀이

공진 주파수 ω_r 는

$$\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2}$$

$$\omega_r = 10\sqrt{1 - 2 \times 0.04} = 10\sqrt{0.92} \approx 9.59$$

공진 크기 (주파수 응답 크기 최대값) M_r 는

$$M_r = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1 - \zeta^2}}$$

$$M_r = \frac{1}{2 \times 0.2 \times \sqrt{1 - 0.04}} = \frac{1}{0.4 \times 0.98} \approx 2.55$$

해설

낮은 감쇠비 ζ 일수록 공진 피크가 커지고, 공진 주파수는 자연진동수보다 약간 낮습니다. 이는 2차 시스템의 특성으로, 보드선도에서 공진 주파수 근처에서 급격한 크기 상승과 위상 변화를 나타냅니다.

답

$$\boxed{\omega_r \approx 9.59, \quad M_r \approx 2.55}$$

4. 전달함수

$$H(s) = \frac{(s/10) + 1}{(s/100) + 1}$$

의 저주파 및 고주파에서의 크기 이득을 계산하시오.

풀이

저주파 ($\omega \rightarrow 0$):

$$H(j0) = \frac{1}{1} = 1 \implies 0\text{dB}$$

고주파 ($\omega \rightarrow \infty$):

$$H(j\omega) \approx \frac{j\omega/10}{j\omega/100} = \frac{\omega/10}{\omega/100} = 10$$

데시벨 변환:

$$20 \log_{10} 10 = 20 \text{ dB}$$

해설

이 전달함수는 영점이 극점보다 낮은 주파수에 있어서, 저주파에선 이득 0 dB, 고주파에선 이득이 20 dB 증가합니다. 즉, 고주파에서 이득이 커지는 형태입니다.

답

$$\text{저주파 이득} = 0 \text{ dB}, \quad \text{고주파 이득} = 20 \text{ dB}$$

5. 전달함수

$$H(s) = \frac{10}{s(s+10)}$$

의 크기 보드선도에서 $\omega = 10 \text{ rad/s}$ 일 때 크기와 위상 각을 구하시오.

풀이

크기:

$$|H(j10)| = \frac{10}{10 \times \sqrt{10^2 + 100}} = \frac{10}{10 \times \sqrt{200}} = \frac{10}{10 \times 14.142} = \frac{10}{141.42} \approx 0.0707$$

dB 단위:

$$20 \log_{10} 0.0707 = 20 \times (-1.15) = -23.0 \text{ dB}$$

위상:

$$\angle H(j10) = -90^\circ - \tan^{-1} \left(\frac{10}{10} \right) = -90^\circ - 45^\circ = -135^\circ$$

해설

영점 없이 극점 2개가 있으므로 크기가 급격히 감소하고, 위상은 2차 극점에 따라 -180도에 근접합니다.

답

$$|H(j10)| \approx -23.0 \text{ dB}, \quad \angle H(j10) = -135^\circ$$

6. 전달함수

$$H(s) = \frac{(s+5)^2}{(s+1)(s+10)^2}$$

의 크기 보드선도에서 기울기 변화를 구간별로 설명하시오.

풀이

영점: 2개 at $\omega = 5$ 극점: 1개 at $\omega = 1$, 2개 at $\omega = 10$

기울기 변화:

- $\omega < 1$: 극점 1개 영향, 기울기 -20 dB/decade
- $1 \leq \omega < 5$: 극점 1개만 반영, 기울기 -20 dB/decade
- $5 \leq \omega < 10$: 영점 2개 추가, 기울기 $-20 + 40 = 20$ dB/decade
- $\omega \geq 10$: 극점 2개 추가, 기울기 $20 - 40 = -20$ dB/decade

해설

영점과 극점 수의 차이와 위치에 따라 기울기가 변화하며, 각 코너 주파수에서 기울기가 ± 20 dB/decade 씩 변화합니다.

답

- $\omega < 1$: -20 dB/decade
- $1 \leq \omega < 5$: -20 dB/decade
- $5 \leq \omega < 10$: $+20$ dB/decade
- $\omega \geq 10$: -20 dB/decade

7. 전달함수

$$H(s) = \frac{1}{s^2 + 4s + 25}$$

의 감쇠비와 자연진동수를 구하고, 보드선도에서 공진 피크 유무를 판단하시오.

풀이

표준형과 비교:

$$s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = s^2 + 4s + 25$$

따라서

$$2\zeta\omega_n = 4, \quad \omega_n^2 = 25 \Rightarrow \omega_n = 5$$

$$\zeta = \frac{4}{2 \times 5} = 0.4$$

해설

감쇠비 0.4는 공진 피크가 나타날 수 있으나 크기가 크게 높지 않은 중간 정도 감쇠 상태입니다. 공진 피크는 $\zeta < \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0.707$ 일 때 나타납니다.

답

$$\zeta = 0.4, \quad \omega_n = 5, \quad \text{공진 피크 있음}$$

8. 전달함수

$$H(s) = \frac{s+1}{s^2+2s+2}$$

의 위상 보드선도에서 $\omega = 1 \text{ rad/s}$ 일 때 위상 각을 구하시오.

풀이

주파수 응답:

$$H(j\omega) = \frac{j\omega + 1}{(j\omega)^2 + 2j\omega + 2}$$

분자의 위상:

$$\angle(j\omega + 1) = \tan^{-1} \frac{\omega}{1} = \tan^{-1} 1 = 45^\circ$$

분모의 위상:

$$(j\omega)^2 + 2j\omega + 2 = -\omega^2 + j2\omega + 2$$

실수부: $2 - \omega^2 = 2 - 1 = 1$ 허수부: $2\omega = 2$

분모 위상:

$$\angle = \tan^{-1} \frac{2}{1} = 63.4^\circ$$

전체 위상:

$$45^\circ - 63.4^\circ = -18.4^\circ$$

해설

영점과 극점의 위상 차이로 인해 전체 위상이 음수가 되며, 이 값은 보드선도 위상 곡선의 특정 지점 위상을 나타냅니다.

답

$$\angle H(j1) \approx -18.4^\circ$$

9. 전달함수

$$H(s) = \frac{1}{s(s+1)(s+10)}$$

의 크기 보드선도에서 $\omega = 0.1 \text{ rad/s}$ 와 $\omega = 10 \text{ rad/s}$ 일 때 크기 차이를 dB 단위로 구하시오.

풀이

크기 식:

$$|H(j\omega)| = \frac{1}{\omega\sqrt{\omega^2+1}\sqrt{\omega^2+100}}$$

$\omega = 0.1$ 대입:

$$|H(j0.1)| = \frac{1}{0.1 \times \sqrt{0.01 + 1} \times \sqrt{0.01 + 100}} \approx \frac{1}{0.1 \times 1.0049 \times 10.0005} \approx \frac{1}{1.005} = 0.995$$

dB 변환:

$$20 \log_{10} 0.995 \approx -0.043 \text{ dB}$$

$\omega = 10$ 대입:

$$|H(j10)| = \frac{1}{10 \times \sqrt{100 + 1} \times \sqrt{100 + 100}} = \frac{1}{10 \times 10.05 \times 14.14} = \frac{1}{1421} = 7.04 \times 10^{-4}$$

dB 변환:

$$20 \log_{10}(7.04 \times 10^{-4}) = 20 \times (-3.15) = -63.0 \text{ dB}$$

크기 차:

$$-0.043 - (-63.0) = 62.96 \text{ dB}$$

해설

주파수가 증가할수록 크기가 급격히 감소하는 특징을 보여줍니다.

답

$$\boxed{63 \text{ dB}}$$

10. 전달함수

$$H(s) = \frac{1}{(s + 1)^3}$$

의 크기 보드선도의 기울기를 설명하시오.

풀이

극점 3개가 중첩되어 있으므로, 각 극점마다 -20 dB/decade 기울기 발생 따라서 총 기울기는

$$-20 \times 3 = -60 \text{ dB/decade}$$

해설

같은 위치에 여러 극점이 모이면 기울기가 그만큼 급격히 변하며, 보드선도에서 급격한 감쇠를 나타냅니다.

답

$$\boxed{-60 \text{ dB/decade}}$$

11. 전달함수

$$H(s) = \frac{s+2}{s^2+3s+2}$$

의 극점과 영점 위치를 구하시오.

풀이

분자 영점: $s = -2$

분모 극점:

$$s^2 + 3s + 2 = 0 \implies (s+1)(s+2) = 0$$

따라서 극점 $s = -1, s = -2$

해설

영점과 극점이 중복 위치 $s = -2$ 가 있으므로, 보드선도에서 영점과 극점이 상쇄하는 효과를 줍니다.

답

영점: -2 , 극점: $-1, -2$

12. 전달함수

$$H(s) = \frac{(s+100)(s+1)}{s(s+10)}$$

의 저주파수 $\omega \rightarrow 0$ 근처 크기와 고주파수 $\omega \rightarrow \infty$ 근처 크기 차이를 구하시오.

풀이

저주파 ($\omega \rightarrow 0$):

분모 s 영향으로 크기 무한대 (0주파수 극점)

고주파 ($\omega \rightarrow \infty$):

분자 차수 2, 분모 차수 2이므로,

크기 근사값은 계수 비율:

$$\frac{100 \times 1}{1 \times 10} = 10$$

dB 변환:

$$20 \log_{10} 10 = 20 \text{ dB}$$

해설

저주파에서는 $s = 0$ 극점 때문에 크기가 매우 크고, 고주파에서는 상수 이득으로 안정화됩니다.

답

저주파 $\rightarrow \infty$, 고주파 $= 20 \text{ dB}$

13. 전달함수

$$H(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 2}$$

의 시스템 감쇠비와 자연진동수를 구하시오.

풀이

표준형:

$$s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = s^2 + 2s + 2$$

따라서

$$2\zeta\omega_n = 2, \quad \omega_n^2 = 2 \Rightarrow \omega_n = \sqrt{2}$$

$$\zeta = \frac{2}{2 \times \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0.707$$

해설

$\zeta = 0.707$ 은 임계 감쇠에 가까운 상태로, 공진 피크가 거의 없는 안정적인 응답을 의미합니다.

답

$$\zeta \approx 0.707, \quad \omega_n \approx 1.414$$

14. 전달함수

$$H(s) = \frac{s + 10}{(s + 1)^2}$$

의 고주파수($\omega \rightarrow \infty$) 위상 각을 구하시오.

풀이

고주파수에서,

$$H(j\omega) \approx \frac{j\omega}{(j\omega)^2} = \frac{j\omega}{-\omega^2} = -\frac{j}{\omega}$$

따라서 위상은

$$\angle H(j\omega) \approx -90^\circ$$

해설

분자가 1차 영점, 분모가 2차 극점이므로, 고주파에서 위상은

$$90^\circ \times (1 - 2) = -90^\circ$$

입니다.

답

$$\boxed{-90^\circ}$$

15. 전달함수

$$H(s) = \frac{(s+5)(s+2)}{(s+1)(s+10)}$$

의 크기 보드선도에서 각 코너주파수 $\omega = 1, 2, 5, 10$ 에서 기울기 변화량을 서술하시오.

풀이

영점: $\omega = 2, 5$ 극점: $\omega = 1, 10$

기울기 변화:

- $\omega = 1$: 극점 1개, 기울기 -20 dB/decade
- $\omega = 2$: 영점 1개, 기울기 +20 dB/decade (합산 0 dB/decade)
- $\omega = 5$: 영점 1개, 기울기 +20 dB/decade (합산 +20 dB/decade)
- $\omega = 10$: 극점 1개, 기울기 -20 dB/decade (합산 0 dB/decade)

해설

각 영점과 극점은 각각 기울기를 ± 20 dB/decade 변화시킵니다. 기울기 변화량은 이들의 합으로 결정됩니다.

답

$$\omega = 1 : -20, \quad \omega = 2 : +20, \quad \omega = 5 : +20, \quad \omega = 10 : -20 \text{ dB/decade}$$

16. 전달함수

$$H(s) = \frac{10}{(s+1)(s+10)(s+100)}$$

의 크기 보드선도에서 저주파와 고주파 이득을 구하시오.

풀이

저주파 ($\omega \rightarrow 0$):

$$|H(j0)| = \frac{10}{1 \times 1 \times 1} = 10 \Rightarrow 20 \text{ dB}$$

고주파 ($\omega \rightarrow \infty$):

차수 3, 모든 극점은 1차, 분자는 상수 10

크기는

$$|H(j\omega)| \approx \frac{10}{\omega^3}$$

$$20 \log_{10} |H(j\omega)| \rightarrow -\infty$$

즉, 고주파에서 급격히 감소함.

해설

저주파에서는 상수 이득이 유지되고, 고주파에서는 3차 극점의 영향으로 급감합니다.

답

$$\text{저주파 이득} = 20 \text{ dB}, \quad \text{고주파 이득} \rightarrow -\infty$$

17. 전달함수

$$H(s) = \frac{s+1}{s^2+2s+2}$$

의 크기 보드선도에서 $\omega = \omega_n$ 근처 크기 변화 특성을 설명하시오.

풀이

$$\omega_n = \sqrt{2} \approx 1.414$$

$$\zeta = 1/\sqrt{2} \approx 0.707$$

크기 응답은 공진 피크가 거의 없고, ω_n 부근에서 완만한 크기 변화가 나타납니다.

해설

이 감쇠비는 임계 감쇠에 가까워 공진 피크가 없고, 크기 보드선도는 급격한 변화 없이 완만합니다.

답

크기 변화는 완만함, 공진 피크 없음

18. 전달함수

$$H(s) = \frac{s}{s^2+4s+13}$$

의 위상 보드선도에서 $\omega = 3 \text{ rad/s}$ 일 때 위상 각을 구하시오.

풀이

분자 위상:

$$\angle j\omega = 90^\circ$$

분모는

$$s^2+4s+13 = (j\omega)^2+4j\omega+13 = -\omega^2+j4\omega+13$$

$\omega = 3$ 대입:

$$\text{실수부} = 13 - 9 = 4, \quad \text{허수부} = 12$$

분모 위상:

$$\tan^{-1} \frac{12}{4} = \tan^{-1} 3 = 71.6^\circ$$

전체 위상:

$$90^\circ - 71.6^\circ = 18.4^\circ$$

해설

위상은 영점과 극점 위상 차이로 결정되며, 이 경우 영점 위상이 더 커서 양의 위상을 가집니다.

답

$$\angle H(j3) \approx 18.4^\circ$$

19. 전달함수

$$H(s) = \frac{1}{(s+1)(s^2+2s+2)}$$

의 크기 보드선도에서 고주파 기울기를 설명하시오.

풀이

극점:

- 1차 극점 at $\omega = 1$

- 2차 극점 at $\omega_n = \sqrt{2}$

고주파에서 3차 극점 효과:

기울기:

$$-20 \times 3 = -60 \text{ dB/decade}$$

해설

복수 극점의 차수 합산에 따라 보드선도 기울기가 급격히 감소합니다.

답

$$-60 \text{ dB/decade}$$

20. 전달함수

$$H(s) = \frac{(s+3)^2}{(s+1)(s+10)}$$

의 위상 보드선도에서 저주파와 고주파 위상 각을 각각 구하시오.

풀이

저주파 ($\omega \rightarrow 0$):

위상 변화 없음, 위상 각 0도

고주파 ($\omega \rightarrow \infty$):

영점 2개 각 +180도 (각 +90도씩) 극점 2개 각 -180도

총 위상:

$$+180^\circ - 180^\circ = 0^\circ$$

해설

저주파와 고주파 위상이 같으며, 중간 구간에서 복잡한 변화가 나타날 수 있습니다.

답

$$\text{저주파 위상} = 0^\circ, \quad \text{고주파 위상} = 0^\circ$$