푸리에 해석 고급 문제 20제

1. $f(t)$가 다음과 같은 주기 함수일 때, $f(t)$의 푸리에 급수 계수 C_n을 복소수 형식으로 구하시오.

$$f(t) = \begin{cases} 1 & 0 < t < \pi \\ -1 & -\pi < t < 0 \end{cases}, \quad \text{주기 } 2\pi$$

풀이: 복소 푸리에 계수 정의에 따라

$$C_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-jnt}dt = \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}(-1)e^{-jnt}dt + \int_{0}^{\pi} 1\cdot e^{-jnt}dt\right)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(-\left[\frac{e^{-jnt}}{-jn}\right]_{-\pi}^{0} + \left[\frac{e^{-jnt}}{-jn}\right]_{0}^{\pi}\right) = \frac{1}{2\pi jn}\left(1 - e^{jn\pi} - e^{-jn\pi} + 1\right)$$

$$= \frac{1}{2\pi jn}\left(2 - 2\cos(n\pi)\right) = \frac{1}{\pi jn}(1 - \cos(n\pi)) = \frac{2}{\pi jn} \text{ if } n \text{ 홀수, 0 otherwise}$$

해설: 이 함수는 홀수 함수이므로 $C_0 = 0$이며, 짝수 n일 때 계수는 0, 홀수 n에 대해서만 성분이 존재한다. 위 계산으로 복소 푸리에 계수를 구할 수 있다.

정답:

$$C_n = \begin{cases} \dfrac{2}{\pi jn} & n \text{ 홀수} \\ 0 & n \text{ 짝수} \end{cases}$$

2. $f(t) = t$를 $(-\pi, \pi)$ 구간에서 정의하고 2π 주기로 확장하였을 때, 푸리에 급수 b_n 계수를 구하고 급수의 수렴 속도를 분석하시오.

풀이:

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t\sin(nt)dt = \frac{2(-1)^{n+1}}{n}$$

푸리에 급수 항은 $b_n \sim 1/n$ 꼴로 수렴한다.

해설: t는 홀수 함수이므로 사인 계수만 존재한다. 계수가 $1/n$ 비례해 서서히 감소하므로, 급수는 느린 속도로 수렴하여 진동 및 Gibbs 현상이 심하다.

정답:

$$b_n = \frac{2(-1)^{n+1}}{n}, \quad \text{수렴 속도 } O\left(\frac{1}{n}\right)$$

3. $f(t) = e^{at}$, $a \in R$ 이고 $f(t)$를 2π 주기 함수로 간주할 때, 복소 푸리에 계수 C_n을 구하시오.

풀이:

$$C_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{at}e^{-jnt}dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{(a-jn)t}dt = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{e^{(a-jn)t}}{a-jn}\right]_{-\pi}^{\pi}$$

$$= \frac{1}{2\pi(a-jn)}\left(e^{(a-jn)\pi} - e^{-(a-jn)\pi}\right) = \frac{\sinh(a\pi)\cos(n\pi) - j\sin(n\pi)\cosh(a\pi)}{\pi(a-jn)}$$

해설: 지수함수 e^{at}를 주기 함수로 확장하면 복소 푸리에 계수는 a와 n을 포함한 복소 함수 형태가 된다. sinh, cosh 함수를 포함한 복잡한 식으로 전개된다.

정답: 위 식

4. 푸리에 급수의 계수가 급격히 감소하는 함수의 특징과 그에 따른 수렴 특성을 논하시오.

풀이 및 해설: 계수가 지수 함수 혹은 그 이상으로 빠르게 감소하는 함수는 매우 매끄럽고 무한번 미분 가능하다. 이런 함수의 급수는 급격히 수렴하고 Gibbs 현상이 거의 없다.

정답: 매끄러운 함수는 푸리에 계수가 빠르게 감소하여 급수가 빠르게 수렴

5. 다음 함수 $f(t)$의 푸리에 변환 $F(\omega)$를 구하시오.

$$f(t) = \begin{cases} 1 & |t| < T \\ 0 & |t| \geq T \end{cases}$$

풀이:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt = \int_{-T}^{T} e^{-j\omega t}dt = \frac{2\sin(\omega T)}{\omega}$$

해설: 사각 펄스의 푸리에 변환은 sinc 함수 형태이며, 주파수 영역에서 무한대 진동과 감쇠를 보인다.

정답:

$$F(\omega) = 2\frac{\sin(\omega T)}{\omega}$$

6. 푸리에 급수에서 Gibbs 현상의 수학적 원인과 해결책을 논하시오.

풀이 및 해설: 불연속점 주변의 급수 근사는 미분 불가능 구간에서의 오차가 국부적으로 커지기 때문이다. 해결책으로는 윈도잉 함수 적용, 적절한 평활화(smoothing) 또는 웨이블릿 변환 이용이 있다.

정답: 불연속점의 비연속성으로 인한 진동이며, 윈도잉 등으로 완화 가능

7. 다음 신호 $x(t) = \cos^3(\omega_0 t)$의 푸리에 급수 성분을 구하고 주요 주파수들을 명시하시오.

풀이: 삼각함수 공식으로 전개하면,

$$\cos^3 x = \frac{3\cos x + \cos 3x}{4}$$

따라서, 주요 주파수 성분은 ω_0와 $3\omega_0$ 이다.

해설: 삼각함수의 거듭제곱은 고조파 성분 생성의 대표적 예이며, 기본 주파수와 그 홀수 배수 주파수로 분해된다.

정답: 주파수 성분: ω_0, $3\omega_0$

8. 푸리에 변환에서 Convolution 정리를 증명하고 그 의미를 설명하시오.

   풀이: 두 함수 $f(t), g(t)$의 컨볼루션 정의:

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau$$

   푸리에 변환은

$$\mathcal{F}\{f * g\} = F(\omega)G(\omega)$$

   즉, 컨볼루션이 주파수 영역에서 곱셈으로 변환됨을 의미한다.

   해설: 이는 신호 처리에서 필터링 및 시스템 응답 분석에 핵심 역할을 하며, 복잡한 적분 문제를 곱셈으로 간단히 해준다.

   정답: 푸리에 변환은 컨볼루션을 곱셈으로 변환한다.

9. 신호 $f(t)$가 2π 주기이고 푸리에 급수 계수가 $a_n = \frac{1}{n^2}, b_n = 0$ 이다. 이 신호의 평활성(smoothness) 정도를 논하시오.

   풀이 및 해설: 계수가 $1/n^2$로 비교적 빠르게 감소하므로 $f(t)$는 연속적이며 1차 미분 가능하다. 계수 감소 속도는 신호의 매끄러움과 직접 연관된다.

   정답: $f(t)$는 1차 미분 가능할 정도로 평활함

10. 푸리에 변환의 Parseval 정리를 증명하고, 신호의 에너지 해석에 대해 설명하시오.

    풀이: Parseval 정리는

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega$$

    로, 시간 영역 에너지와 주파수 영역 에너지가 동일함을 증명한다.

    해설: 신호의 총 에너지는 시간 도메인과 주파수 도메인에서 일치하며, 이는 신호 분석과 통신 이론에서 중요하다.

    정답: 시간과 주파수 영역의 에너지는 같다.

11. $f(t) = \sin(t)$에 대해 주기 2π로 정의된 푸리에 급수의 직교성을 이용해 b_n을 증명하시오.

    풀이:

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin(t)\sin(nt)dt = \delta_{1n}$$

직교성에 의해 $b_1 = 1$, 나머지는 0.

해설: 사인 함수들은 서로 직교하며 기본 주파수 외의 항은 0이 된다.

정답:

$$b_n = \begin{cases} 1 & n = 1 \\ 0 & n \neq 1 \end{cases}$$

12. $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\omega_0 t}$의 복소 푸리에 계수 C_n이 다음과 같이 주어질 때, 함수 $f(t)$를 구하시오.

$$C_0 = 0, \quad C_{\pm 1} = \frac{1}{2}, \quad \text{나머지는 } 0$$

풀이:

$$f(t) = C_1 e^{j\omega_0 t} + C_{-1} e^{-j\omega_0 t} = \frac{1}{2} e^{j\omega_0 t} + \frac{1}{2} e^{-j\omega_0 t} = \cos(\omega_0 t)$$

해설: 두 복소 지수 함수의 합은 코사인 함수가 되며, 이 기본 주파수의 단일 성분 신호이다.

정답: $f(t) = \cos(\omega_0 t)$

13. 시간 영역 신호가 $\delta(t - t_0)$로 이동하면 푸리에 변환에 어떤 변화가 생기는지 증명하시오.

풀이: 시간 이동 특성:

$$\mathcal{F}\{f(t - t_0)\} = e^{-j\omega t_0} F(\omega)$$

해설: 시간 이동은 주파수 영역에서 위상 회전을 초래하며, 크기 스펙트럼은 변화하지 않는다.

정답: $e^{-j\omega t_0} F(\omega)$

14. $f(t) = t^2$의 2π 주기 푸리에 급수 계수를 구하고 수렴 특성을 논하시오.

풀이:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t^2 dt = \frac{2\pi^2}{3}, \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t^2 \cos(nt) dt = \frac{4(-1)^n}{n^2}$$
$$b_n = 0$$

해설: t^2는 짝수 함수이므로 사인 계수는 0이고, 코사인 계수는 $1/n^2$ 꼴로 감소한다. 빠른 수렴을 보인다.

정답:

$$a_0 = \frac{2\pi^2}{3}, \quad a_n = \frac{4(-1)^n}{n^2}, \quad b_n = 0$$

15. 푸리에 급수 수렴의 다양한 유형 (점별 수렴, 평균 수렴, 균등 수렴)을 설명하시오.

풀이 및 해설: 점별 수렴: 각 점에서 급수 값이 함수 값에 수렴 평균 수렴: 구간 전체 평균 오차가 0으로 수렴 균등 수렴: 모든 점에서 수렴률이 균일 이 중 균등 수렴이 가장 엄격함

정답: 위 세 가지 수렴 유형 존재, 균등 수렴이 최강

16. $f(t)$와 $g(t)$의 푸리에 변환 $F(\omega)$, $G(\omega)$가 주어질 때, $f(t)g(t)$의 푸리에 변환을 구하시오.

풀이: 푸리에 변환에서 곱셈은 컨볼루션으로 변환됨

$$\mathcal{F}\{f(t)g(t)\} = \frac{1}{2\pi}(F * G)(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\xi)G(\omega - \xi)d\xi$$

해설: 시간 도메인의 곱셈은 주파수 도메인에서 컨볼루션 연산으로 변환되어 신호 성분이 섞인다.

정답: $\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\xi)G(\omega - \xi)d\xi$

17. 푸리에 급수의 계수 a_n, b_n이 각각 다음과 같을 때, 함수 $f(t)$를 구하시오.

$$a_0 = 1, \quad a_n = 0, \quad b_n = \frac{2(-1)^{n+1}}{n}$$

풀이:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nt + b_n \sin nt) = \frac{1}{2} + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nt$$

이는 $f(t) = t$ (for $-\pi < t < \pi$) 임.

해설: 사인 계수 b_n은 t 함수의 푸리에 급수 계수이며, 상수항과 합쳐 원 함수가 된다.

정답: $f(t) = t$

18. $f(t)$가 $L^1(R)$ 함수일 때, 푸리에 변환의 Riemann-Lebesgue 정리를 증명하고 의미를 설명하시오.

풀이 및 해설: 함수 $f(t)$가 적분 가능하면, 푸리에 변환 $F(\omega)$는 무한대에서 0으로 수렴한다. 이는 고주파 성분이 점점 사라진다는 의미이다.

정답: $\lim_{\omega \to \infty} F(\omega) = 0$

19. 함수 $f(t)$가 N 차 미분 가능할 때, 푸리에 급수 계수의 감소 속도와의 관계를 설명하시오.

풀이 및 해설: N 차 미분 가능하면, 계수는 $1/n^{N+1}$ 이상으로 감소한다. 더 미분 가능할수록 계수 감소가 빨라져 급수 수렴이 빨라진다.

정답: $f \in C^N \Rightarrow a_n, b_n = O(1/n^{N+1})$

20. 푸리에 변환에서 불연속 신호를 처리할 때 필터링 방법과 그 효과를 서술하시오.

    풀이 및 해설: 저역통과 필터(LPF)를 이용하여 고주파 성분을 제거하면 Gibbs 현상을 완화하고 신호가 평활화된다. 다만 세부 신호 손실 가능성도 있다.

    정답: LPF로 고주파 제거 → 진동 완화, 평활화 효과