고급 문제 1

문제
RLC 직렬 회로에서

$$R = 2\,\Omega, \quad L = 10\,\mathrm{mH}, \quad C = 100\,\mathrm{\mu F}$$

1. 감쇠비 ζ와 고유진동수 ω_0를 계산하시오.
2. 회로가 저감쇠 상태임을 증명하시오.
3. 초기조건 $i(0) = 0$, $v_C(0) = 5\,\mathrm{V}$일 때 전류 $i(t)$의 과도응답 해석식을 구하시오.

풀이

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{10 \times 10^{-3} \times 100 \times 10^{-6}}} = \frac{1}{\sqrt{10^{-3}}} = 31.62\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$$
$$\zeta = \frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}} = \frac{2}{2}\sqrt{\frac{100 \times 10^{-6}}{10 \times 10^{-3}}} = 1 \times \sqrt{0.01} = 0.1$$

감쇠비 $\zeta = 0.1 < 1$ 이므로 저감쇠 상태임이 확인된다.
저감쇠 회로의 자연 응답은 다음과 같다:

$$i(t) = e^{-\zeta\omega_0 t}\left(A\cos\omega_d t + B\sin\omega_d t\right)$$

여기서 감쇠 진동수 $\omega_d = \omega_0\sqrt{1-\zeta^2} = 31.62 \times \sqrt{1-0.01} = 31.17\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$.
초기조건을 적용하기 위해 회로 미분방정식과 초기 전류, 전압 조건을 사용하여 A, B를 구한다.
커패시터 전압 $v_C = \frac{1}{C}\int i(t)dt + v_C(0)$ 식과 $i(0) = 0$, $v_C(0) = 5$를 통해 상수를 계산한다.

해설
회로의 미분방정식은 2차 선형 미분방정식으로, 해는 감쇠비에 따라 저감쇠, 임계감쇠, 과감쇠로 나뉜다. $\zeta = 0.1 < 1$이므로 저감쇠 상태로 진동하면서 감쇠하는 특성을 보인다. 초기 조건을 이용해 상수 A, B를 구하는 과정은 과도응답을 완전히 결정하는 핵심 절차다.

정답

$$\begin{cases} \omega_0 = 31.62\,\mathrm{rad\,s^{-1}}, \quad \zeta = 0.1, \quad \omega_d = 31.17\,\mathrm{rad\,s^{-1}} \\ i(t) = e^{-3.162t}\left(A\cos 31.17t + B\sin 31.17t\right) \\ A = 0, \quad B = \frac{5\omega_0}{L\omega_d} = \frac{5\times 31.62}{0.01\times 31.17} \approx 50.7 \end{cases}$$

따라서

$$i(t) = 50.7\,e^{-3.162t}\sin 31.17t$$

고급 문제 2

문제
아래 회로에서 $R = 4\,\Omega$, $L = 20\,\mathrm{mH}$, $C = 50\,\mathrm{\mu F}$이다.
초기 조건은 전류 $i(0) = 0\,\mathrm{A}$, 커패시터 전압 $v_C(0) = 10\,\mathrm{V}$이다.
1. 임계감쇠 저항값 R_c를 구하시오.
2. 이 회로의 과도응답이 저감쇠 상태임을 증명하시오.
3. 초기 조건을 이용하여 과도응답 전류 $i(t)$를 구하시오.

풀이

1. 임계감쇠 저항:

$$R_c = 2\sqrt{\frac{L}{C}} = 2\sqrt{\frac{20 \times 10^{-3}}{50 \times 10^{-6}}} = 2\sqrt{400} = 2 \times 20 = 40\,\Omega$$

2. 감쇠비 계산:

$$\zeta = \frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}} = \frac{4}{2}\sqrt{\frac{50 \times 10^{-6}}{20 \times 10^{-3}}} = 2 \times \sqrt{0.0025} = 2 \times 0.05 = 0.1$$

$\zeta = 0.1 < 1$이므로 저감쇠 상태임을 알 수 있다.

3. 고유진동수:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{20 \times 10^{-3} \times 50 \times 10^{-6}}} = \frac{1}{\sqrt{10^{-3}}} = 31.62\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$$

감쇠진동수:

$$\omega_d = \omega_0\sqrt{1-\zeta^2} = 31.62 \times \sqrt{1-0.01} = 31.62 \times 0.995 = 31.46\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$$

과도응답 전류는

$$i(t) = e^{-\zeta\omega_0 t}\left(A\cos\omega_d t + B\sin\omega_d t\right)$$

초기 조건 적용:

$i(0) = 0$이므로

$$0 = A \implies A = 0$$

커패시터 전압과 전류 관계식에서 초기 전압을 반영하여

$$v_C(0) = \frac{1}{C}\int_0^0 i(t)dt + v_C(0) = 10\,\mathrm{V}$$

미분방정식과 초기 조건으로부터

$$B = \frac{v_C(0)\omega_0}{L\omega_d} = \frac{10 \times 31.62}{0.02 \times 31.46} \approx 503$$

따라서,

$$i(t) = 503\,e^{-3.162t}\sin 31.46t$$

해설

임계감쇠 저항을 계산하고, 주어진 저항이 그보다 작아 저감쇠임을 확인하였다. 과도응답의 해는 감쇠진동 형태로 나타나며 초기 조건에서 상수를 결정하는 것이 핵심이다.

정답

$$\begin{cases} R_c = 40\,\Omega, \quad \zeta = 0.1, \quad \omega_0 = 31.62\,\mathrm{rad\,s^{-1}}, \quad \omega_d = 31.46\,\mathrm{rad\,s^{-1}} \\ i(t) = 503\,e^{-3.162t}\sin 31.46t \end{cases}$$

고급 문제 3

문제
다음 RLC 직렬회로에서 $R = 5\,\Omega$, $L = 50\,\mathrm{mH}$, $C = 10\,\mu\mathrm{F}$이다.
회로의 초기 전류 $i(0) = 2\,\mathrm{A}$, 커패시터 전압 $v_C(0) = 0\,\mathrm{V}$이다.
1. 감쇠비 ζ와 고유진동수 ω_0를 구하시오.
2. 과도응답 전류 $i(t)$를 구하시오.

풀이

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{50 \times 10^{-3} \times 10 \times 10^{-6}}} = \frac{1}{\sqrt{5 \times 10^{-4}}} = 44.72\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$$
$$\zeta = \frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}} = \frac{5}{2}\sqrt{\frac{10 \times 10^{-6}}{50 \times 10^{-3}}} = 2.5 \times \sqrt{0.0002} = 2.5 \times 0.01414 = 0.03535$$

감쇠비가 $0.03535 < 1$ 이므로 저감쇠 상태이다.
감쇠진동수:
$$\omega_d = \omega_0\sqrt{1-\zeta^2} = 44.72 \times \sqrt{1-(0.03535)^2} \approx 44.69\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$$
과도응답 전류는
$$i(t) = e^{-\zeta\omega_0 t}\left(A\cos\omega_d t + B\sin\omega_d t\right)$$
초기조건 적용:
$i(0) = 2 = A$
회로 전압 식에서 커패시터 전압이 0 이므로, 미분방정식으로부터
$$\left.\frac{di}{dt}\right|_{t=0} = \frac{v_C(0) - Ri(0)}{L} = \frac{0 - 5 \times 2}{0.05} = -200\,\mathrm{A/s}$$

$i(t)$ 미분:
$$\frac{di}{dt} = -\zeta\omega_0 e^{-\zeta\omega_0 t}\left(A\cos\omega_d t + B\sin\omega_d t\right) + e^{-\zeta\omega_0 t}\left(-A\omega_d\sin\omega_d t + B\omega_d\cos\omega_d t\right)$$
$t = 0$ 대입:
$$\frac{di}{dt}(0) = -\zeta\omega_0 A + B\omega_d = -0.03535 \times 44.72 \times 2 + B \times 44.69 = -3.162 + 44.69B$$
위 값은 -200이므로,
$$-3.162 + 44.69B = -200 \implies B = \frac{-200 + 3.162}{44.69} = \frac{-196.838}{44.69} \approx -4.40$$
따라서
$$i(t) = e^{-1.58t}\left(2\cos 44.69t - 4.40\sin 44.69t\right)$$

해설
저감쇠 RLC 회로에서 초기 전류와 커패시터 전압 조건을 이용해 상수 A, B를 결정한다. 과도응답은 감쇠 진동 성분과 감쇠 지수에 따라 표현된다.

정답

$$\begin{cases} \omega_0 = 44.72\,\mathrm{rad\,s^{-1}}, \quad \zeta = 0.03535, \quad \omega_d = 44.69\,\mathrm{rad\,s^{-1}} \\ i(t) = e^{-1.58t}\left(2\cos 44.69t - 4.40\sin 44.69t\right) \end{cases}$$

고급 문제 4

문제
RLC 직렬 회로에서 $R = 15\,\Omega$, $L = 100\,\mathrm{mH}$, $C = 25\,\mu\mathrm{F}$이다.
초기 전류 $i(0) = 0\,\mathrm{A}$, 커패시터 전압 $v_C(0) = 20\,\mathrm{V}$이다.
1. 임계감쇠 저항 R_c를 구하시오.
2. 과감쇠 상태인지 확인하시오.
3. 과도응답 전류 $i(t)$를 구하시오.

풀이
1. 임계감쇠 저항:

$$R_c = 2\sqrt{\frac{L}{C}} = 2\sqrt{\frac{100 \times 10^{-3}}{25 \times 10^{-6}}} = 2\sqrt{4000} = 2 \times 63.25 = 126.5\,\Omega$$

2. 감쇠비:

$$\zeta = \frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}} = \frac{15}{2}\sqrt{\frac{25 \times 10^{-6}}{100 \times 10^{-3}}} = 7.5 \times \sqrt{0.00025} = 7.5 \times 0.01581 = 0.1186$$

$\zeta = 0.1186 < 1$ 이므로 과감쇠 상태가 아니다. 따라서 저감쇠 상태이다.
3. 고유진동수:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{100 \times 10^{-3} \times 25 \times 10^{-6}}} = \frac{1}{\sqrt{2.5 \times 10^{-3}}} = 20\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$$

감쇠진동수:

$$\omega_d = \omega_0\sqrt{1-\zeta^2} = 20 \times \sqrt{1-(0.1186)^2} = 20 \times 0.9929 = 19.86\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$$

과도응답 전류:

$$i(t) = e^{-\zeta\omega_0 t}\left(A\cos\omega_d t + B\sin\omega_d t\right)$$

초기 조건 적용:
$i(0) = 0$ 이므로

$$0 = A \implies A = 0$$

전류 미분값:

$$\left.\frac{di}{dt}\right|_{t=0} = \frac{v_C(0) - Ri(0)}{L} = \frac{20-0}{0.1} = 200\,\mathrm{A/s}$$

$i(t)$ 미분:

$$\frac{di}{dt} = -\zeta\omega_0 e^{-\zeta\omega_0 t}(A\cos\omega_d t + B\sin\omega_d t) + e^{-\zeta\omega_0 t}(-A\omega_d\sin\omega_d t + B\omega_d\cos\omega_d t)$$

$t = 0$ 대입:

$$\frac{di}{dt}(0) = -\zeta\omega_0 A + B\omega_d = 0 + B \times 19.86 = 19.86B$$

따라서,

$$19.86B = 200 \implies B = \frac{200}{19.86} \approx 10.07$$

결과적으로,

$$i(t) = 10.07\,e^{-2.372t}\sin 19.86t$$

해설
임계감쇠 저항보다 실제 저항이 작아 저감쇠 상태임을 확인하였다. 과도응답 해석은 초기 전류, 커패시터 전압 조건으로 상수를 결정하는 과정이다. 감쇠 진동수 및 지수 감쇠를 포함하는 형태로 과도응답 전류가 표현된다.

정답

$$\begin{cases} R_c = 126.5\,\Omega, \quad \zeta = 0.1186, \quad \omega_0 = 20\,\mathrm{rad\,s^{-1}}, \quad \omega_d = 19.86\,\mathrm{rad\,s^{-1}} \\ i(t) = 10.07\,e^{-2.372t}\sin 19.86t \end{cases}$$

고급 문제 5

문제
복합 RLC 직렬회로에 내부저항이 있는 인덕터가 포함되어 있다.
회로 구성은 다음과 같다:
- 외부 저항 $R = 10\,\Omega$
- 인덕터 $L = 50\,\mathrm{mH}$ 및 내부 저항 $r_L = 2\,\Omega$ 포함
- 커패시터 $C = 20\,\mu\mathrm{F}$
- 초기 조건: 인덕터 전류 $i_L(0) = 1\,\mathrm{A}$, 커패시터 전압 $v_C(0) = 5\,\mathrm{V}$
- 입력 전압: 단위계단 함수 $v_{in}(t) = V_0 u(t)$, 여기서 $V_0 = 12\,\mathrm{V}$

1. 전체 회로의 유효 저항과 인덕턴스를 고려한 감쇠비 ζ와 고유진동수 ω_0를 구하시오.
2. 라플라스 변환을 사용해 회로의 전류 $I(s)$를 구하시오.
3. 초기 조건과 입력을 포함하여 시간 영역에서 전류 $i(t)$의 완전 해석식을 구하시오.
4. $t \to \infty$에서 회로의 정상 상태 전류를 구하시오.

풀이
1. 인덕터 내부저항이 있으므로 전체 저항은

$$R_{eq} = R + r_L = 10 + 2 = 12\,\Omega$$

감쇠비와 고유진동수는

$$\zeta = \frac{R_{eq}}{2}\sqrt{\frac{C}{L}} = \frac{12}{2}\sqrt{\frac{20\times10^{-6}}{50\times10^{-3}}} = 6\times\sqrt{0.0004} = 6\times0.02 = 0.12$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{50\times10^{-3}\times20\times10^{-6}}} = \frac{1}{\sqrt{10^{-3}}} = 31.62\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$$

2. 회로 미분방정식에 라플라스 변환 적용: 회로 임피던스:

$$Z(s) = R_{eq} + sL + \frac{1}{sC}$$

입력 전압 라플라스 변환:

$$V_{in}(s) = \frac{V_0}{s}$$

초기 조건을 포함한 전류 라플라스 변환식:

$$I(s) = \frac{V_{in}(s) + Li_L(0) + R_{eq}\frac{v_C(0)}{s}}{Z(s)}$$

상세한 식 전개는 아래와 같다.
3. 시간 영역 해석은 부분분수 분해 및 역변환을 통해 $i(t)$ 표현: 과도응답과 정상응답 성분으로 분리하여 각각 구함.
4. 정상상태 전류:

$$i(\infty) = \lim_{s\to0} sI(s) = \frac{V_0}{R_{eq}} = \frac{12}{12} = 1\,\mathrm{A}$$

해설

인덕터 내부저항은 회로 감쇠에 영향을 미친다. 라플라스 변환을 활용하여 초기조건과 입력이 모두 반영된 전류 해석식을 도출한다. 복잡한 분수식의 부분분수 분해, 역변환 과정이 필요하며, 정상상태 전류는 단순히 저항 분배에 의해 결정된다.

정답

$$\begin{cases} R_{eq} = 12\,\Omega, \quad \zeta = 0.12, \quad \omega_0 = 31.62\,\mathrm{rad\,s^{-1}} \\ I(s) = \frac{\frac{12}{s}+0.05\times 1+12\times\frac{5}{s}}{12+0.05s+\frac{1}{20\times 10^{-6}s}} \\ i(t) = \text{복잡한 지수감쇠} + \text{진동} + \text{정상응답 형태 (부분분수 분해 필요)} \\ i(\infty) = 1\,\mathrm{A} \end{cases}$$

고급 문제 6

문제

다음 회로는 두 개의 직렬 연결된 RLC 회로가 직렬로 결합되어 있다.
각 회로는 다음과 같다:
- 제1회로: $R_1 = 5\,\Omega$, $L_1 = 30\,\mathrm{mH}$, $C_1 = 10\,\mu\mathrm{F}$
- 제2회로: $R_2 = 10\,\Omega$, $L_2 = 50\,\mathrm{mH}$, $C_2 = 5\,\mu\mathrm{F}$

초기 조건: 각 커패시터 전압과 인덕터 전류가 다음과 같다.

$$v_{C1}(0) = 5\,\mathrm{V}, \quad i_{L1}(0) = 0\,\mathrm{A}, \quad v_{C2}(0) = 0\,\mathrm{V}, \quad i_{L2}(0) = 2\,\mathrm{A}$$

1. 두 회로의 상태방정식을 작성하시오.
2. 라플라스 변환을 이용하여 전체 회로의 전류 응답을 구하는 일반식을 유도하시오.
3. 시간 영역에서 각 회로 전류의 과도응답 해석적 표현을 기술하시오.
4. 각 회로의 감쇠비와 고유진동수를 비교 및 해석하시오.

풀이

1. 각 회로의 미분방정식을 상태방정식 형태로 작성: 상태변수는 $x_1 = i_{L1}$, $x_2 = v_{C1}$, $x_3 = i_{L2}$, $x_4 = v_{C2}$로 정의한다. 상태방정식은 4차 미분방정식 시스템으로 전개된다.

2. 라플라스 변환 후 연립방정식 행렬 표현:

$$\mathbf{X}(s) = [s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1}\mathbf{B} + \text{초기조건 항}$$

여기서 $\mathbf{A}, \mathbf{B}$는 시스템 행렬, 입력 행렬이다.

3. 역 라플라스 변환을 통해 시간 영역 해석식 획득: 고유값과 고유벡터를 이용한 일반해로 표현한다.

4. 각각 회로의 감쇠비:

$$\zeta_1 = \frac{R_1}{2}\sqrt{\frac{C_1}{L_1}} = \frac{5}{2}\sqrt{\frac{10\times 10^{-6}}{30\times 10^{-3}}} = 2.5 \times 0.01826 = 0.0457$$

$$\zeta_2 = \frac{R_2}{2}\sqrt{\frac{C_2}{L_2}} = \frac{10}{2}\sqrt{\frac{5\times 10^{-6}}{50\times 10^{-3}}} = 5 \times 0.01 = 0.05$$

고유진동수:

$$\omega_{01} = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}} = \frac{1}{\sqrt{30\times 10^{-3}\times 10\times 10^{-6}}} = 57.74\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$$

$$\omega_{02} = \frac{1}{\sqrt{L_2 C_2}} = \frac{1}{\sqrt{50\times 10^{-3}\times 5\times 10^{-6}}} = 63.25\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$$

해설

이 문제는 고차원 상태공간 모델을 요구하며, 라플라스 변환을 통한 복잡한 행렬 연산 및 초기조건 처리가 필요하다. 각 회로의 감쇠비 및 진동 특성을 비교하여 회로간 동작 차이를 분석할 수 있다.

정답

$$\begin{cases} \text{상태방정식}: \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u(t), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{X}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}U(s) + \text{초기조건 항} \\ \zeta_1 = 0.0457, \quad \omega_{01} = 57.74\,\mathrm{rad\,s^{-1}} \\ \zeta_2 = 0.05, \quad \omega_{02} = 63.25\,\mathrm{rad\,s^{-1}} \end{cases}$$

고급 문제 7

문제

다음과 같은 복합 RLC 회로를 고려한다.
- 저항 $R = 8\,\Omega$, 인덕터 $L = 40\,\mathrm{mH}$, 커패시터 $C = 15\,\mu\mathrm{F}$
- 인덕터 내부저항 $r_L = 1\,\Omega$ 포함
- 입력 전압은 시간에 따라 변화하는 지수 감쇠 형태로 주어진다:

$$v_{in}(t) = V_0 e^{-\alpha t} u(t), \quad V_0 = 20\,\mathrm{V}, \quad \alpha = 50\,\mathrm{s^{-1}}$$

- 초기 조건: 인덕터 전류 $i_L(0) = 0\,\mathrm{A}$, 커패시터 전압 $v_C(0) = 0\,\mathrm{V}$

1. 회로의 유효 저항과 감쇠비 ζ, 고유진동수 ω_0를 구하시오.
2. 라플라스 변환을 사용하여 회로 임피던스 $Z(s)$와 입력 전압 $V_{in}(s)$를 구하고, 전류 $I(s)$를 표현하시오.
3. 입력의 라플라스 변환과 초기 조건을 고려하여 $I(s)$를 완전하게 나타내고, 부분분수 분해를 위한 준비 과정을 서술하시오.
4. 시간 영역에서 전류 $i(t)$의 해석적 표현을 구하시오.
5. $t \to \infty$에서 정상상태 전류를 구하고, 입력 신호의 감쇠가 회로 응답에 미치는 영향을 해석하시오.

풀이

1. 인덕터 내부저항 포함하여 전체 저항:

$$R_{eq} = R + r_L = 8 + 1 = 9\,\Omega$$

감쇠비는,

$$\zeta = \frac{R_{eq}}{2}\sqrt{\frac{C}{L}} = \frac{9}{2}\sqrt{\frac{15 \times 10^{-6}}{40 \times 10^{-3}}} = 4.5 \times \sqrt{0.000375} = 4.5 \times 0.01936 = 0.0871$$

고유진동수는,

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{40 \times 10^{-3} \times 15 \times 10^{-6}}} = \frac{1}{\sqrt{6 \times 10^{-4}}} = 40.82\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$$

2. 회로 임피던스 $Z(s)$:

$$Z(s) = R_{eq} + sL + \frac{1}{sC} = 9 + 0.04s + \frac{1}{15 \times 10^{-6} s} = 9 + 0.04s + \frac{1}{1.5 \times 10^{-5} s}$$

입력 전압 라플라스 변환:

$$V_{in}(s) = \frac{V_0}{s+\alpha} = \frac{20}{s+50}$$

3. 전류 $I(s)$: 초기 조건이 0이므로,

$$I(s) = \frac{V_{in}(s)}{Z(s)} = \frac{20}{(s+50)\left(9 + 0.04s + \frac{1}{1.5\times10^{-5}s}\right)}$$

분모를 통분하여 정리하면,

$$Z(s) = \frac{0.04s^2 + 9s + \frac{1}{1.5\times10^{-5}}}{s} = \frac{0.04s^2 + 9s + 66666.67}{s}$$

따라서,

$$I(s) = \frac{20s}{(s+50)(0.04s^2 + 9s + 66666.67)}$$

부분분수 분해를 위해 분모의 2차 다항식을 근으로 인수분해하거나 근의 형태로 표현한다.

4. 시간 영역 해석: 복소수 근이 존재하는 경우, 감쇠 진동 형태의 응답이 나타난다. 라플라스 역변환은 각 항에 대해 표준 변환식을 이용하며, 지수 감쇠 입력과 회로 고유 진동수가 결합한 형태로 표현된다.

5. 정상 상태 해석: 입력의 감쇠율 $\alpha = 50$은 매우 크므로, 입력이 빠르게 사라져 장기적으로는 전류도 0으로 수렴한다. 즉, 회로는 초기 과도응답 후 아무 전류도 흐르지 않는 상태가 된다.

해설

본 문제는 비정상 입력(지수감쇠 형태)의 라플라스 변환 적용, 내부저항을 포함한 정확한 임피던스 계산, 그리고 복잡한 부분분수 분해를 통한 역변환 과정이 요구된다. 특히 입력의 지수 감쇠 특성이 회로의 정상 상태 응답에 결정적인 영향을 미친다. 회로의 감쇠비와 고유진동수는 내부 저항과 소자의 조합으로 계산하며, 과도응답의 진동 및 감쇠 특성을 결정한다.

정답

$$\begin{cases} R_{eq} = 9\,\Omega, \quad \zeta = 0.0871, \quad \omega_0 = 40.82\,\mathrm{rad\,s^{-1}} \\ Z(s) = 9 + 0.04s + \frac{1}{1.5\times10^{-5}s} \\ V_{in}(s) = \frac{20}{s+50} \\ I(s) = \frac{20s}{(s+50)(0.04s^2+9s+66666.67)} \\ i(t) = \text{부분분수 분해 후 지수감쇠 진동 함수 형태 (복소근 사용)} \\ \lim_{t\to\infty} i(t) = 0 \quad \text{(입력 신호가 빠르게 사라져 정상상태 전류 없음)} \end{cases}$$

고급 문제 8

문제

다음과 같은 복합 RLC 회로가 있다. 이 회로는 비정상 상태 초기조건과 시간에 따라 변하는 복합 입력을 가진다.

- 회로 구성:

$$R = 10\,\Omega, \quad L = 100\,\mathrm{mH}, \quad C = 50\,\mu\mathrm{F}$$

- 인덕터 내부저항:

$$r_L = 2\,\Omega$$

- 입력 전압:

$$v_{in}(t) = V_1 e^{-\alpha t}\sin(\omega_{in} t)\,u(t), \quad V_1 = 15\,\mathrm{V}, \quad \alpha = 30\,\mathrm{s^{-1}}, \quad \omega_{in} = 200\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$$

- 초기조건:

$$i_L(0) = 0.5\,\mathrm{A}, \quad v_C(0) = 10\,\mathrm{V}$$

1. 유효 저항과 감쇠비 ζ, 고유진동수 ω_0를 구하시오.
2. 입력 신호의 라플라스 변환 $V_{in}(s)$를 구하고, 전체 회로 임피던스 $Z(s)$를 표현하시오.
3. 초기조건을 포함하여 라플라스 영역에서 회로 전류 $I(s)$를 도출하시오.
4. 역라플라스 변환을 통해 시간 영역 전류 $i(t)$의 일반 해를 유도하시오.
5. 입력 신호의 주파수 ω_{in}과 회로 고유진동수 ω_0 간의 관계가 과도응답 및 정상응답에 미치는 영향을 상세히 설명하시오.

풀이

1. 인덕터 내부저항 포함 총 저항:

$$R_{eq} = R + r_L = 10 + 2 = 12\,\Omega$$

감쇠비 ζ는:

$$\zeta = \frac{R_{eq}}{2}\sqrt{\frac{C}{L}} = \frac{12}{2}\sqrt{\frac{50\times10^{-6}}{100\times10^{-3}}} = 6\times\sqrt{0.0005} = 6\times0.02236 = 0.134$$

고유진동수 ω_0:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{100\times10^{-3}\times50\times10^{-6}}} = \frac{1}{\sqrt{5\times10^{-3}}} = 14.14\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$$

—

2. 입력 신호 라플라스 변환: 입력이 $v_{in}(t) = V_1 e^{-\alpha t}\sin(\omega_{in}t)u(t)$이므로, 라플라스 변환 공식에 따라

$$V_{in}(s) = V_1\cdot\frac{\omega_{in}}{(s+\alpha)^2+\omega_{in}^2} = 15\cdot\frac{200}{(s+30)^2+200^2}$$

—

3. 회로 임피던스 $Z(s)$:

$$Z(s) = R_{eq} + sL + \frac{1}{sC} = 12 + 0.1s + \frac{1}{50\times10^{-6}s} = 12 + 0.1s + \frac{1}{5\times10^{-5}s}$$

분모를 통일하면,

$$Z(s) = \frac{0.1s^2+12s+20000}{s}$$

초기 조건을 고려한 전류 라플라스 변환 $I(s)$: 초기 인덕터 전류와 커패시터 전압이 모두 0이 아니므로, 초기조건 항 포함

$$I(s) = \frac{V_{in}(s) + Li_L(0) + R_{eq}\frac{v_C(0)}{s}}{Z(s)}$$

각 항을 넣으면,

$$I(s) = \frac{V_1\frac{\omega_{in}}{(s+\alpha)^2+\omega_{in}^2} + 0.1\times0.5 + 12\times\frac{10}{s}}{\frac{0.1s^2+12s+20000}{s}} = \frac{s\left[15\frac{200}{(s+30)^2+200^2} + 0.05 + \frac{120}{s}\right]}{0.1s^2+12s+20000}$$

정리하면,

$$I(s) = \frac{15\cdot200s}{[(s+30)^2+200^2](0.1s^2+12s+20000)} + \frac{0.05s}{0.1s^2+12s+20000} + \frac{120}{0.1s^2+12s+20000}$$

—

4. 역라플라스 변환: 이전 식은 복잡한 분수 함수들의 합으로 구성되어 있다. - 첫 번째 항은 감쇠 진동과 고주파수 성분을 가진 입력에 의한 강제 응답 - 두 번째와 세 번째 항은 초기 조건에 의한 자유 응답(과도응답)

각 항별로 부분분수 분해를 수행하고, 표준 변환 테이블 및 컨볼루션 정리를 사용해 시간 영역 해를 구한다. 과도응답은 감쇠진동과 지수함수의 곱 형태이며, 강제응답은 입력의 감쇠와 주파수에 맞는 강제진동 성분을 가진다. 전체 해는 자유응답과 강제응답의 합으로 표현된다.

—

5. 입력 주파수 $\omega_{in} = 200\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$는 고유진동수 $\omega_0 = 14.14\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$보다 훨씬 크다. 이는 회로가 강제로 고주파 성분에 의해 크게 영향을 받지 않고, 입력 신호가 빠르게 감쇠되어 정상상태에서 전류가 거의 0에 수렴함을 의미한다. 즉, 과도응답 단계에서만 고주파 신호가 회로에 잠시 영향을 미치며, 시간이 지나면 인덕터와 커패시터의 에너지 저장 효과로 인해 진동이 사라진다. 따라서 회로는 저주파수 성분보다 고주파 감쇠 입력에 덜 민감하며, 입력의 감쇠율 α가 크기 때문에 전류는 빠르게 감소한다.

해설

본 문제는 시간에 따라 감쇠하는 고주파 입력이 복합 소자 회로에 미치는 영향을 분석하는 고난도 문제이다. 라플라스 변환을 이용한 입력 신호 변환과 복잡한 분수식 구성, 초기조건 완전 반영이 필수적이다. 특히 감쇠 진동과 초기 에너지 저장 효과가 결합된 해석은 이해하기 까다롭기 때문에, 각 항의 물리적 의미와 수학적 변환을 명확히 이해하는 것이 중요하다. 입력 주파수가 회로 고유진동수보다 훨씬 높기 때문에 정상상태 응답에서는 신호가 거의 소멸되고, 초기 과도응답에서만 잠시 전류가 흐르는 형태가 된다. 이로 인해 실질적인 전력 전달은 제한적이며, 에너지 손실과 저장 현상이 뚜렷이 나타난다.

정답

$$\begin{cases} R_{eq} = 12\,\Omega, \quad \zeta = 0.134, \quad \omega_0 = 14.14\,\mathrm{rad\,s^{-1}} \\ V_{in}(s) = 15\frac{200}{(s+30)^2+200^2} \\ Z(s) = \frac{0.1s^2+12s+20000}{s} \\ I(s) = \frac{15\cdot 200s}{[(s+30)^2+200^2](0.1s^2+12s+20000)} + \frac{0.05s}{0.1s^2+12s+20000} + \frac{120}{0.1s^2+12s+20000} \\ i(t) = \text{자유응답(감쇠진동)} + \text{강제응답(감쇠 진동 사인)} \\ \lim_{t\to\infty} i(t) \approx 0 \quad \text{(고주파 감쇠 입력에 의한 빠른 소멸)} \end{cases}$$