고급 문제 20문제 풀이 및 해설 (난이도: 극악)

1. **문제** 비선형 시스템을 선형화하여 전달함수를 구하는 방법과 그 한계를 서술하시오.

   풀이 및 해설
   비선형 시스템을 전달함수로 분석하려면, 평형점(운영점) 주변에서 테일러 급수를 사용하여 1차 근사(선형화)를 수행한다. 이 과정에서 시스템의 비선형 방정식을

   $$\dot{x} = f(x, u)$$

   주변 평형점 (x_0, u_0)에서

   $$\Delta\dot{x} = A\Delta x + B\Delta u$$

   형태로 근사한다. 여기서

   $$A = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x_0,u_0}, \quad B = \left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{x_0,u_0}$$

   전달함수는 선형화된 상태방정식을 라플라스 변환하여 얻는다. 한계는 선형화가 평형점 근처에서만 유효하며, 큰 입력 변화나 비선형 동작 시 분석이 부정확하다는 점이다.

   답 평형점 주변에서 야코비안 행렬로 선형화 후 전달함수 도출, 단 평형점 인근에서만 유효.

2. **문제** 상태공간 표현에서 전달함수를 구하는 과정을 상세히 설명하시오.

   풀이 및 해설
   상태공간 방정식은,

   $$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

   라플라스 변환 적용 시,

   $$sX(s) - x(0) = AX(s) + BU(s)$$

   초기조건 0 가정하면,

   $$(sI - A)X(s) = BU(s) \Rightarrow X(s) = (sI - A)^{-1}BU(s)$$

   출력은,

   $$Y(s) = CX(s) + DU(s) = [C(sI - A)^{-1}B + D]U(s)$$

   따라서 전달함수는,

   $$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

   이 과정을 통해 상태공간 모델로부터 전달함수를 구할 수 있다.

   답 $G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$

3. **문제** 복소평면 상 전달함수 극점의 다중근이 시스템 안정성과 동적응답에 미치는 영향을 분석하시오.

   풀이 및 해설
   극점이 다중근인 경우, 시스템의 해가 다항식 항을 포함해 일반 해보다 느리게 감쇠하거나 발산할 수 있다. 예를 들어, 단일 극점 $s = -\alpha$이 중복도 m이라면, 시간응답에 $t^{m-1}e^{-\alpha t}$ 항이 포함되어 감쇠 속도가 늦어지고 과도응답이 길어진다. 다중극점이 우측 평면에 있으면 안정성 문제는 더 심각해지고, 좌측 평면이라도 응답 특성이 불리해진다.

   답 다중근은 감쇠 속도 지연, 응답 지연 및 불안정 위험 증가 유발.

4. **문제** 비정상(unstable) 시스템에 대한 루프 전송함수 설계 시 고려사항과 안정화 기법을 설명하시오.

   풀이 및 해설
   불안정 시스템은 폐루프 극점을 좌측 평면으로 이동시켜야 한다. 루프 전달함수 설계 시, - 우선 불안정 극점 위치 파악 - 보상기 설계로 극점 이동 (예: 리드-래그, PID 보상) - 극점 이동이 불가능하면 상태피드백, 관측기 활용 - 경우에 따라 내부 안정성(internal stability)을 확보해야 함 보상기는 시스템의 위상 및 이득 마진을 확보하여 안정화시킨다.

   답 보상기 설계로 극점 좌측 이동, 상태피드백, 내부 안정성 확보 필요.

5. **문제** 전달함수의 분모가 고차 다항식일 때 루트 궤적(root locus) 분석 절차와 주요 해석 포인트를 서술하시오.

   풀이 및 해설
   루트 궤적은 개루프 전달함수 극점이 폐루프 극점으로 이동하는 경로를 나타낸다. 절차: 1. 개루프 전달함수 극점과 영점 파악 2. 실축상의 루트 궤적 구간 결정 (극점과 영점 사이 실근 개수에 따라) 3. 궤적 시작점(극점)과 끝점(영점 또는 무한대) 파악 4. 궤적의 분기점, 곡률, 무한대로 향하는 궤적 각도 계산 5. 안정성 변화와 감쇠비 변화를 해석한다.

   답 극점/영점 분석 후 실축 구간, 분기점, 무한대 궤적 각도 등을 계산해 안정성 판단.

6. **문제** 전달함수의 감쇠비와 고유진동수가 시스템 과도응답의 최대 오버슈트와 정착시간에 미치는 관계를 수식과 함께 설명하시오.

   풀이 및 해설
   최대 오버슈트 M_p는

   $$M_p = e^{-\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$$

   정착시간 t_s는 일반적으로,

   $$t_s \approx \frac{4}{\zeta\omega_n}$$

   감쇠비 ζ가 증가하면 오버슈트가 감소하고, 정착시간은 감쇠비와 고유진동수에 반비례한다. 즉, 높은 감쇠비는 안정적이지만 느린 응답을, 낮은 감쇠비는 빠른 응답에 진동을 동반한다.

   답 $M_p = e^{-\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}}, \quad t_s \approx \frac{4}{\zeta\omega_n}$

7. **문제** 상태피드백 제어 설계에서 전달함수와 상태공간 모델 간의 관계를 설명하고, 전달함수를 이용한 극 배치법의 한계를 기술하시오.

   풀이 및 해설
   상태피드백은,

   $$u = -Kx + r$$

   전달함수는 상태공간 방정식을 라플라스 변환해 얻는 출력/입력 비이다. 극 배치법은 상태공간 극점을 원하는 위치로 이동시키는 방법으로, 전달함수 극점 조작과 직접 연결된다. 한계는 다음과 같다: - 모든 극점 위치 지정 불가 (가역성 조건) - 높은 차수 시스템에서 설계 복잡 - 외란이나 모델 불확실성에 민감

   답 상태피드백은 전달함수 극점 위치 조절 수단이나 제한적 가능성 및 민감성 존재.

8. **문제** 주파수 응답 기반 설계에서 나이퀴스트 안정판별법(Nyquist criterion)의 적용 방법과 직관적 의미를 서술하시오.

   풀이 및 해설
   나이퀴스트 선도를 이용해 폐루프 극점의 우측 평면 포함 개수를 판별한다. 주파수 응답곡선이 -1점 주위를 감싸는 횟수를 계산해 불안정 극점 개수를 알 수 있다. 직관적으로, 시스템 이득과 위상 변화가 어느 정도까지 허용되는지 파악해 안정성 마진을 확보하는 방법이다.

답 주파수 응답이 -1점을 감싸는 횟수로 안정성 판별, 이득 및 위상 마진 해석 도구.

9. **문제** 비정상 시스템의 전달함수는 존재하지 않는다고 했을 때, 상태공간에서 비정상성을 판단하는 방법과 해결책을 설명하시오.

   풀이 및 해설
   비정상성은 상태행렬 A가 양의 실수부를 가진 고유값을 포함할 때 발생한다. 상태공간 모델 고유값 해석으로 판별 가능하다. 해결책으로는 상태피드백으로 극점 이동, 적절한 보상기 설계, 혹은 모델 재정립이 필요하다.

   답 A행렬 고유값 분석으로 판별, 극점 이동 및 보상기로 안정화.

10. **문제** 전달함수의 실수영점과 허수영점이 시스템 위상응답에 미치는 차이를 분석하시오.

    풀이 및 해설
    실수영점은 위상을 +90도까지 천천히 증가시키며, 시스템의 위상 여유에 긍정적 영향을 준다. 허수영점은 특정 주파수에서 급격한 위상 변화를 일으켜 진동이나 불안정을 유발할 수 있다. 따라서 허수영점 존재는 설계 시 주의가 필요하다.

    답 실수영점은 위상 증가, 허수영점은 급격한 위상 변화와 불안정 유발.

11. **문제** 라플라스 역변환 중 잔여정리(residue theorem)를 이용하여 복잡한 전달함수의 시간응답을 구하는 절차를 상세히 설명하시오.

    풀이 및 해설
    1. 전달함수를 부분분수로 분해한다. 2. 각 분수의 분모 극점 위치를 찾는다. 3. 잔여정리로 각 극점에 대한 잔여(residue)를 계산한다. 4. 역변환은 각 잔여에 $e^{s_i t}$를 곱한 형태로 표현된다. 5. 모든 항을 합쳐 시간영역 응답식을 완성한다. 이 과정은 고차 또는 복잡 전달함수 해석에 효과적이다.

    답 부분분수 분해 후 각 극점 잔여 계산, $e^{s_i t}$ 항으로 역변환 합산.

12. **문제** 전달함수 극점이 단위 원 밖에 위치하는 경우 z-변환 기반 이산 시스템의 안정성 판별법을 설명하시오.

    풀이 및 해설
    이산 시스템은 극점이 복소평면의 단위원 내부에 있어야 안정하다. 단위원 밖 극점은 발산하는 응답을 만든다. z-변환 전달함수 극점을 구하고 절댓값 $|z_i| < 1$ 인지 확인한다.

    답 모든 극점이 단위원 내에 있어야 안정이다.

13. **문제** 복합 시스템에서 전달함수를 병렬 및 직렬 연결 시 구성 방법을 서술하고 예를 드시오.

    풀이 및 해설
    - 직렬 연결: 전달함수 곱셈

    $$G_{total}(s) = G_1(s) \times G_2(s)$$

    - 병렬 연결: 전달함수 합산

    $$G_{total}(s) = G_1(s) + G_2(s)$$

    예: 두 1차 시스템 직렬 연결

    $$G_1 = \frac{1}{s+1}, \quad G_2 = \frac{2}{s+2}$$

    직렬:

    $$G_{total} = \frac{1}{s+1} \times \frac{2}{s+2} = \frac{2}{(s+1)(s+2)}$$

답 직렬: 곱셈, 병렬: 합산. 예시 포함 위와 같음.

14. **문제** 전달함수 설계에서 내재 불안정(internal instability)이란 무엇이며, 어떻게 대응하는지 기술하시오.

    풀이 및 해설
    내재 불안정은 폐루프 시스템이 표면상 안정해 보여도 내부 신호 경로에 불안정 극점이 존재하는 경우를 말한다. 대응법으로는 상태공간 모델에서 내부 극점 분석, 적절한 피드백 경로 추가, 관측기 설계 등이 있다.

    답 내부 극점 불안정 현상, 상태공간 내부 극점 제어 필요.

15. **문제** 전달함수의 극점이 중복될 때 루트 궤적이 어떻게 변화하는지 설명하고, 설계 시 주의점도 기술하시오.

    풀이 및 해설
    중복 극점은 루트 궤적 분기점 역할을 하며, 궤적이 서로 다른 방향으로 분리된다. 이 과정에서 위상 변화가 급격하며, 시스템의 감쇠 및 안정성에 민감하게 작용한다. 설계 시 중복 극점 위치와 궤적 방향을 면밀히 분석해야 한다.

    답 중복 극점은 분기점으로 작용, 설계 시 궤적 분리와 위상 변화를 주의해야 한다.

16. **문제** 전달함수를 이용한 최적 제어(Linear Quadratic Regulator, LQR) 설계의 기본 원리와 관련 수학식을 서술하시오.

    풀이 및 해설
    LQR은 상태공간 시스템에서 비용함수

    $$J = \int_0^\infty (x^T Q x + u^T R u) dt$$

    를 최소화하는 피드백 제어 $u = -Kx$ 를 설계한다. 리카티 방정식(Riccati equation)을 풀어 최적 이득 행렬 K를 얻는다. 이로써 안정성과 성능을 동시에 고려한 제어 설계가 가능하다.

    답 리카티 방정식 풀어 비용함수 최소화하는 최적 피드백 이득 K 설계.

17. **문제** 전달함수의 극점과 영점 분포가 시간 영역 응답의 위상 지연 및 위상 선도를 어떻게 결정하는지 수학적으로 설명하시오.

    풀이 및 해설
    주파수 응답 위상은 극점과 영점의 위상 기여 합이다. 각 극점 p_i와 영점 z_j에 대해 위상 기여는

    $$\phi(s) = \sum_j \tan^{-1}\left(\frac{\omega}{\mathrm{Re}(z_j) - \omega}\right) - \sum_i \tan^{-1}\left(\frac{\omega}{\mathrm{Re}(p_i) - \omega}\right)$$

    이 위상은 시간 영역 응답의 위상 지연(time delay)과 직접 관련된다.

    답 극점과 영점 각각의 위상 합으로 위상 지연 결정.

18. **문제** 비선형 전달함수를 갖는 시스템에서 주파수 응답 분석을 수행할 때 고려해야 할 점과 한계를 서술하시오.

    풀이 및 해설
    비선형 시스템은 주파수 응답이 입력 진폭 및 상태에 따라 변하기 때문에, 선형 시스템처럼 고정된 전달함수로 표현 불가능하다. 주파수 응답은 선형화 구간에서만 의미 있고, 진폭 의존성, 고조파 발생, 교란에 대한 비선형 효과 고려 필요하다.

    답 선형화 한정, 진폭 의존성 및 고조파 등 비선형 효과로 제한적 활용.

19. **문제** 전달함수 극점의 민감도(sensitivity)를 해석하고, 이를 제어 시스템 설계에 어떻게 적용하는지 기술하시오.

    풀이 및 해설
    극점 민감도는 시스템 파라미터 변동에 따른 극점 위치 변화 정도를 나타낸다. 민감도가 높으면 시스템 불안정에 취약하다. 설계 시 극점 민감도를 낮추도록 보상기 설계, 강건 제어법 적용이 필요하다.

    답 파라미터 변화에 극점 변화 민감도, 안정성 위해 낮게 설계.

20. **문제** 다중 입력 다중 출력(MIMO) 시스템에서 전달함수 행렬의 특성과 이를 통한 시스템 분석 방법을 설명하시오.

    풀이 및 해설
    MIMO 시스템 전달함수는 행렬 형태이며, 각 원소가 입력과 출력 간 관계를 나타낸다. 분석 시 행렬 특성치(특이값 분해, 행렬식 등)를 활용해 안정성과 성능을 평가한다. 특히 각 채널 간 상호작용을 고려해야 하며, 고유값 배치 및 다변량 제어 설계에 중요하다.

    답 행렬 전달함수로 상호작용 분석, 특이값 및 고유값 활용해 안정성 평가.

21. **문제** 전달함수에 미치는 불확실성(파라미터 변동, 외란 등)을 고려한 강건 제어 설계의 기본 원리를 기술하시오.

    풀이 및 해설
    불확실성을 모델링하여 전달함수에 포함시키고, worst-case 시나리오를 고려해 설계한다. H-infinity 제어나 μ-합성 등의 방법이 대표적이다. 목표는 성능 저하 없이 불확실성 내에서 안정성과 응답 보장이다.

    답 불확실성 모델링 후 worst-case 안정성 확보, H-infinity 등 기법 활용.

22. **문제** 전달함수를 통한 시스템 식별(system identification) 기법과 그 한계를 서술하시오.

    풀이 및 해설
    실험 입력과 출력을 이용해 전달함수 매개변수를 추정한다. 주로 주파수 응답법, 임펄스 응답법, 최소자승법 등을 활용한다. 한계는 잡음, 비선형성, 비정상성 등 실제 환경 영향과 모델 오차 존재.

    답 실험 데이터 기반 매개변수 추정, 잡음 및 비선형성으로 정확도 제한.