고급 문제 20문제 - 초기 조건 포함 해석

문제 1. 직렬 RLC 회로에서 저항 R , 인덕터 L , 축전기 C 가 연결되어 있으며, 입력 전압은 $0V$ 입니다. 초기 조건으로 인덕터 전류 $i(0) = 0.5A$, 축전기 전압 $v_C(0) = 15V$ 일 때, 시간에 따른 회로 전류 $i(t)$ 를 구하시오.

풀이: 회로의 미분방정식은 키르히호프 전압법칙(KVL)에 의해 다음과 같이 나타낼 수 있습니다:

$$L \frac{d^2 i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} i = 0$$

초기 조건에서 전류는 주어져 있지만, 이차 미분방정식이므로 첫 번째 미분값도 필요합니다. 이를 구하기 위해 회로에 걸린 각 성분 전압을 고려합니다.

인덕터 전압은

$$v_L = L \frac{di}{dt}$$

축전기 전압은

$$v_C = \frac{1}{C} \int i(t) dt$$

KVL에 따라 각 전압 합이 0이어야 하므로, 초기 시점에서:

$$L \frac{di}{dt}(0) + Ri(0) + v_C(0) = 0$$

따라서 초기 전류의 미분값은:

$$\frac{di}{dt}(0) = -\frac{Ri(0) + v_C(0)}{L}$$

일반해는 특성방정식

$$Ls^2 + Rs + \frac{1}{C} = 0$$

의 근 s_1, s_2 에 따라 달라집니다. 근이 서로 다르면,

$$i(t) = Ae^{s_1 t} + Be^{s_2 t}$$

초기 조건을 이용해 A, B 를 구합니다.

해설: - 두 개의 초기 조건이 주어졌으므로, 2차 미분방정식의 해에 포함된 상수 두 개를 결정할 수 있습니다. - 초기 전류뿐 아니라, 회로에 저장된 에너지(축전기 전압)로 인해 전류의 변화율도 초기값으로 주어집니다. - 근의 판별식에 따라 해의 형태가 과도 지수 감쇠 또는 감쇠 진동으로 결정되므로 문제의 근 본질을 이해하는 것이 중요합니다. - 이 문제는 시간 영역에서 과도 상태를 완벽히 분석하는 고전적인 전기회로 해석 문제입니다.

답:

$$i(t) = Ae^{s_1 t} + Be^{s_2 t}, \quad A, B \text{는 초기 조건으로 결정}$$

문제 2. RC 직렬 회로에서 입력 전압이 $V_{in}(t) = V_0 u(t)$ (단위 계단 함수)이고, 축전기 초기 전압이 $V_C(0) = V_{init}$ 일 때, 축전기 전압 $v_C(t)$ 를 구하시오.

풀이: 회로 미분방정식:

$$RC \frac{dv_C}{dt} + v_C = V_0$$

초기 조건:

$$v_C(0) = V_{init}$$

이차 상미분방정식의 해법과 유사하게, 동차해:

$$v_h(t) = Ke^{-\frac{t}{RC}}$$

특수해는 상수:

$$v_p = V_0$$

전체 해는

$$v_C(t) = v_h(t) + v_p = Ke^{-\frac{t}{RC}} + V_0$$

초기 조건을 대입하여

$$v_C(0) = K + V_0 = V_{init} \implies K = V_{init} - V_0$$

따라서 최종 답은:

$$v_C(t) = V_0 + (V_{init} - V_0)e^{-\frac{t}{RC}}$$

해설: - 축전기 전압은 초기값에서 시작하여 입력 전압 V_0 으로 점차 충전됩니다. - 지수 함수 형태로 과도 상태가 진행되며, 시간 상수 $\tau = RC$ 에 의해 충전 속도가 결정됩니다. - 초기 전압이 입력 전압과 다를 때, 이 식은 과도 응답을 정확히 설명합니다.

답:

$$v_C(t) = V_0 + (V_{init} - V_0)e^{-\frac{t}{RC}}$$

문제 3. RL 회로에서 인덕터 초기 전류가 $i_L(0) = I_0$, 저항 R , 인덕턴스 L , 입력 전압 0V일 때 인덕터 전류 $i_L(t)$ 를 구하시오.

풀이: 회로 미분방정식:

$$L \frac{di_L}{dt} + Ri_L = 0$$

초기 조건:

$$i_L(0) = I_0$$

동차 1차 미분방정식의 해는 지수 감소 형태입니다:

$$i_L(t) = I_0 e^{-\frac{R}{L}t}$$

해설: - 입력 전압이 0이므로, 회로에 저장된 에너지가 인덕터 전류로 나타나며 지수적으로 감소합니다. - 인덕터 전류는 저항에 의해 감쇠되어 결국 0으로 수렴합니다. - 이 해는 회로 과도 응답 중 초기 저장 에너지 소멸 현상을 설명합니다.

답:

$$i_L(t) = I_0 e^{-\frac{R}{L}t}$$

문제 4. 직렬 RLC 회로에서 $R = 10 \Omega$, $L = 1 H$, $C = 0.001 F$, 초기 전류 $i(0) = 0$, 축전기 전압 $v_C(0) = 20 V$, 입력 전압 0V일 때 자연 응답 전류 $i(t)$ 를 구하시오.

풀이: 특성방정식:

$$Ls^2 + Rs + \frac{1}{C} = 0 \implies s^2 + 10s + 1000 = 0$$

판별식:

$$\Delta = 100 - 4000 = -3900 < 0$$

근은 복소수로,

$$s = -5 \pm j61.24$$

자연 응답 전류:

$$i(t) = e^{-5t}(A \cos 61.24t + B \sin 61.24t)$$

초기 조건에서:

$$i(0) = A = 0$$

미분값 초기 조건은 축전기 전압으로부터 유도:

$$L \frac{di}{dt}(0) + Ri(0) + v_C(0) = 0 \implies \frac{di}{dt}(0) = -\frac{v_C(0)}{L} = -20$$

따라서,

$$\frac{di}{dt}(0) = B\omega_d = -20 \implies B = -\frac{20}{61.24} \approx -0.326$$

해설: - 회로가 과도 상태에서 감쇠 진동 응답을 나타냅니다. - 초기 전류는 0이지만, 초기 축전기 전압에 의해 전류가 점차 변화하며 감쇠 진동을 보입니다. - 미분 초기 조건은 전류 변화율로, 회로의 물리적 에너지 저장 상태를 반영합니다.

답:

$$i(t) = -0.326e^{-5t} \sin 61.24t$$

문제 5. RC 회로에서 입력 전압이 $V_{in}(t) = V_0u(t)$, 축전기 초기 전압이 V_{init} 일 때, 시간에 따른 축전기 전압과 초기 조건을 이용한 응답을 구하시오.

풀이: 미분방정식:

$$RC \frac{dv_C}{dt} + v_C = V_0$$

초기 조건:

$$v_C(0) = V_{init}$$

동차해:

$$v_h(t) = Ke^{-\frac{t}{RC}}$$

특수해:

$$v_p = V_0$$

전체 해:

$$v_C(t) = V_0 + (V_{init} - V_0)e^{-\frac{t}{RC}}$$

해설: - 축전기는 초기 전압에서 시작하여 입력 전압으로 점진적으로 충전됩니다. - 시간 상수 $\tau = RC$ 가 응답 속도를 결정합니다. - 초기 조건 반영이 중요한 부분으로, 실제 회로 상태를 잘 표현합니다.

답:

$$v_C(t) = V_0 + (V_{init} - V_0)e^{-\frac{t}{RC}}$$

문제 6. RL 회로에서 입력 전압이 0이고, 인덕터 초기 전류가 I_0 이며, 저항과 인덕턴스는 각각 R, L 이다. 인덕터 전류 $i_L(t)$ 를 구하시오.

풀이: 미분방정식:

$$L \frac{di_L}{dt} + Ri_L = 0$$

초기 조건:

$$i_L(0) = I_0$$

해:

$$i_L(t) = I_0e^{-\frac{R}{L}t}$$

해설: - 입력 전압이 0이므로, 인덕터 전류는 회로에 저장된 에너지 소산으로 인해 지수적으로 감소합니다. - 이 식은 인덕터가 에너지를 방출하는 기본적인 특성을 보여줍니다.

답:

$$i_L(t) = I_0 e^{-\frac{R}{L}t}$$

문제 7. 직렬 RLC 회로에서 $R = 5 \Omega$, $L = 2 H$, $C = 0.0005 F$, 초기 전류 $i(0) = 0$, 축전기 전압 $v_C(0) = 50 V$, 입력 전압 0V일 때, 자연 응답 전류 $i(t)$ 를 구하시오.

풀이: 특성방정식:

$$2s^2 + 5s + 2000 = 0 \implies s^2 + 2.5s + 1000 = 0$$

판별식:

$$\Delta = 6.25 - 4000 = -3993.75 < 0$$

복소 근:

$$s = -1.25 \pm j31.62$$

자연 응답:

$$i(t) = e^{-1.25t}(A \cos 31.62t + B \sin 31.62t)$$

초기 조건에서:

$$i(0) = A = 0$$

$$L \frac{di}{dt}(0) + Ri(0) + v_C(0) = 0 \implies \frac{di}{dt}(0) = -\frac{v_C(0)}{L} = -\frac{50}{2} = -25$$

따라서:

$$B \times 31.62 = -25 \implies B = -0.79$$

해설: - 회로는 감쇠 진동 응답을 가지며, 초기 축전기 전압에 의해 전류가 시작됩니다. - 인덕터 전류 변화율은 초기 전압에 직접적으로 비례합니다.

답:

$$i(t) = -0.79e^{-1.25t} \sin 31.62t$$

문제 8. RC 회로에서 $R = 10 \Omega$, $C = 0.01 F$, 입력 전압 $V_{in} = 5 V$, 초기 축전기 전압 $V_{init} = 2 V$ 일 때, 축전기 전압 $v_C(t)$ 를 구하시오.

풀이: 미분방정식:

$$RC \frac{dv_C}{dt} + v_C = 5$$

초기 조건:

$$v_C(0) = 2$$

시간 상수는

$$\tau = RC = 10 \times 0.01 = 0.1 s$$

전체 해:

$$v_C(t) = 5 + (2 - 5)e^{-\frac{t}{0.1}} = 5 - 3e^{-10t}$$

해설: - 축전기가 2V에서 5V로 지수적으로 충전됩니다. - 시간 상수 0.1초는 충전 속도를 결정하며, 지수함수의 감쇠가 빠릅니다.

답:

$$v_C(t) = 5 - 3e^{-10t}$$

문제 9. RL 회로에서 $R = 4\Omega$, $L = 0.2H$, 입력 전압이 $10V$ 로 계단 입력되고, 초기 인덕터 전류가 $0A$ 일 때, 인덕터 전류 $i_L(t)$ 를 구하시오.

풀이: 미분방정식:

$$L \frac{di_L}{dt} + Ri_L = 10$$

초기 조건:

$$i_L(0) = 0$$

동차해:

$$i_h = Ke^{-\frac{R}{L}t} = Ke^{-20t}$$

특수해:

$$i_p = \frac{10}{4} = 2.5$$

전체 해:

$$i_L(t) = 2.5 + Ke^{-20t}$$

초기 조건에서:

$$0 = 2.5 + K \implies K = -2.5$$

해설: - 인덕터 전류가 0에서 2.5A로 빠르게 증가합니다. - 시간 상수는 매우 작아 매우 빠른 변화가 발생합니다.

답:

$$i_L(t) = 2.5(1 - e^{-20t})$$

문제 10. RLC 회로에서 $R = 15\Omega$, $L = 0.5H$, $C = 0.001F$, 초기 전류 $i(0) = 0$, 축전기 전압 $v_C(0) = 10V$, 입력 전압 $0V$ 일 때 자연 응답 전류를 구하시오.

풀이: 특성방정식:

$$0.5s^2 + 15s + 1000 = 0 \implies s^2 + 30s + 2000 = 0$$

판별식:

$$\Delta = 900 - 8000 = -7100 < 0$$

복소 근:

$$s = -15 \pm j79.37$$

자연 응답:

$$i(t) = e^{-15t}(A \cos 79.37t + B \sin 79.37t)$$

초기 조건에서:

$$i(0) = A = 0$$

$$L \frac{di}{dt}(0) + Ri(0) + v_C(0) = 0 \implies \frac{di}{dt}(0) = -\frac{v_C(0)}{L} = -20$$

따라서:

$$B \times 79.37 = -20 \implies B = -0.252$$

해설: - 강한 감쇠 진동 형태이며 초기 축전기 전압이 전류 변화를 주도합니다. - 실제 회로의 에너지 저장과 소산 과정을 나타냅니다.

답:

$$i(t) = -0.252e^{-15t} \sin 79.37t$$

문제 11. RC 회로에서 $R = 1\text{ k}\Omega$, $C = 1\text{ }\mu\text{F}$, 초기 축전기 전압 0 V , 입력 전압 5 V 가 순간 인가될 때, 축전기 전압 $v_C(t)$ 를 구하시오.

풀이: 시간 상수:

$$\tau = RC = 10^3 \times 10^{-6} = 10^{-3}\text{ s}$$

미분방정식:

$$RC \frac{dv_C}{dt} + v_C = 5$$

초기 조건:

$$v_C(0) = 0$$

해:

$$v_C(t) = 5 \left(1 - e^{-\frac{t}{10^{-3}}} \right) = 5(1 - e^{-1000t})$$

해설: - 축전기는 0에서 5V까지 매우 빠르게 충전됩니다. - 시간 상수가 작아 충전 속도가 빠름을 의미합니다.

답:

$$v_C(t) = 5(1 - e^{-1000t})$$

문제 12. RL 회로에서 입력 전압 12 V , $R = 6\text{ }\Omega$, $L = 0.1\text{ H}$, 인덕터 초기 전류 1 A 일 때 인덕터 전류 $i_L(t)$ 를 구하시오.

풀이: 미분방정식:

$$L \frac{di_L}{dt} + Ri_L = 12$$

초기 조건:

$$i_L(0) = 1$$

시간 상수:

$$\tau = \frac{L}{R} = \frac{0.1}{6} \approx 0.0167\text{ s}$$

해:

$$i_L(t) = I_{final} + (I_0 - I_{final})e^{-\frac{t}{\tau}} = 2 + (1 - 2)e^{-60t} = 2 - e^{-60t}$$

해설: - 인덕터 전류가 1A에서 2A로 매우 빠르게 증가합니다. - 지수 함수로 나타나는 전류 변화는 인덕터 특성을 반영합니다.

답:

$$i_L(t) = 2 - e^{-60t}$$

문제 13. RLC 직렬 회로에서 $R = 3\text{ }\Omega$, $L = 1\text{ H}$, $C = 0.002\text{ F}$, 초기 전류 0 , 초기 축전기 전압 40 V , 입력 전압 0 V 일 때 자연 응답 전류를 구하시오.

풀이: 특성방정식:

$$s^2 + 3s + 500 = 0$$

판별식:

$$\Delta = 9 - 2000 = -1991 < 0$$

근:

$$s = -1.5 \pm j44.6$$

자연 응답:

$$i(t) = e^{-1.5t}(A \cos 44.6t + B \sin 44.6t)$$

초기 조건에서:

$$i(0) = A = 0$$

$$L \frac{di}{dt}(0) + Ri(0) + v_C(0) = 0 \implies \frac{di}{dt}(0) = -\frac{v_C(0)}{L} = -40$$

따라서:

$$B \times 44.6 = -40 \implies B = -0.897$$

해설: - 감쇠 진동 형태 - 초기 축전기 전압이 전류 변화율을 결정

답:

$$i(t) = -0.897e^{-1.5t} \sin 44.6t$$

문제 14. RC 회로에서 $R = 500 \Omega$, $C = 2 \mu F$, 초기 축전기 전압 3V, 입력 전압 9V가 인가될 때 축전기 전압을 구하시오.

풀이: 시간 상수:

$$\tau = RC = 500 \times 2 \times 10^{-6} = 0.001 \text{ s}$$

미분방정식과 초기 조건으로부터,

$$v_C(t) = 9 + (3 - 9)e^{-\frac{t}{0.001}} = 9 - 6e^{-1000t}$$

해설: - 빠른 충전 응답 - 초기 전압 3V에서 9V로 지수적으로 증가

답:

$$v_C(t) = 9 - 6e^{-1000t}$$

문제 15. RL 회로에서 입력 전압 24V, $R = 8 \Omega$, $L = 0.4 \text{ H}$, 인덕터 초기 전류 0일 때 인덕터 전류를 구하시오.

풀이: 시간 상수:

$$\tau = \frac{L}{R} = \frac{0.4}{8} = 0.05 \text{ s}$$

최종 전류:

$$I_{final} = \frac{24}{8} = 3 \text{ A}$$

초기 조건과 해:

$$i_L(t) = 3 \left(1 - e^{-\frac{t}{0.05}} \right) = 3(1 - e^{-20t})$$

해설: - 인덕터 전류가 0에서 3A로 급속 증가 - 시간 상수가 작아 빠른 과도 응답

답:

$$i_L(t) = 3(1 - e^{-20t})$$

문제 16. RLC 직렬 회로에서 $R = 20\Omega$, $L = 1H$, $C = 0.0005F$, 초기 전류 0, 축전기 전압 60V, 입력 0V일 때 자연 응답 전류를 구하시오.

풀이: 특성방정식:

$$s^2 + 20s + 2000 = 0$$

판별식:

$$\Delta = 400 - 8000 = -7600 < 0$$

근:

$$s = -10 \pm j87.18$$

자연 응답:

$$i(t) = e^{-10t}(A \cos 87.18t + B \sin 87.18t)$$

초기 조건에서:

$$i(0) = A = 0$$

$$L \frac{di}{dt}(0) + Ri(0) + v_C(0) = 0 \implies \frac{di}{dt}(0) = -\frac{60}{1} = -60$$

따라서:

$$B \times 87.18 = -60 \implies B = -0.688$$

해설: - 초기 축전기 전압이 큰 경우, 초기 전류 변화율도 큼. - 감쇠 진동으로 회로 전류가 변화함.

답:

$$i(t) = -0.688e^{-10t} \sin 87.18t$$

문제 17. RC 회로에서 $R = 2k\Omega$, $C = 0.5\mu F$, 초기 전압 1V, 입력 10V가 걸렸을 때 축전기 전압을 구하시오.

풀이: 시간 상수:

$$\tau = 2000 \times 0.5 \times 10^{-6} = 0.001 s$$

해:

$$v_C(t) = 10 + (1 - 10)e^{-\frac{t}{0.001}} = 10 - 9e^{-1000t}$$

해설: - 축전기가 초기 1V에서 10V로 빠르게 충전됨. - 작은 시간 상수로 급격한 변화

답:

$$v_C(t) = 10 - 9e^{-1000t}$$

문제 18. RL 회로에서 $R = 10\Omega$, $L = 0.5H$, 입력 전압 0V, 초기 인덕터 전류 5A일 때 전류를 구하시오.

풀이: 시간 상수:

$$\tau = \frac{L}{R} = \frac{0.5}{10} = 0.05 s$$

입력 0V이므로 전류 감소:

$$i_L(t) = 5e^{-\frac{t}{0.05}} = 5e^{-20t}$$

해설: - 인덕터에 저장된 에너지가 저항을 통해 소산됨 - 전류는 지수적으로 0으로 감소

답:

$$i_L(t) = 5e^{-20t}$$

문제 19. RLC 직렬회로에서 $R = 8\Omega$, $L = 1H$, $C = 0.001F$, 초기 전류 0, 초기 축전기 전압 25V, 입력 0V일 때 자연 응답 전류를 구하시오.

풀이: 특성방정식:

$$s^2 + 8s + 1000 = 0$$

판별식:

$$\Delta = 64 - 4000 = -3936 < 0$$

근:

$$s = -4 \pm j62.7$$

자연 응답:

$$i(t) = e^{-4t}(A \cos 62.7t + B \sin 62.7t)$$

초기 조건에서:

$$i(0) = A = 0$$

$$L \frac{di}{dt}(0) + Ri(0) + v_C(0) = 0 \implies \frac{di}{dt}(0) = -25$$

따라서:

$$B \times 62.7 = -25 \implies B = -0.399$$

해설: - 초기 전류는 0이나, 축전기 전압으로 인해 전류 변화가 시작됨 - 감쇠 진동 응답

답:

$$i(t) = -0.399e^{-4t} \sin 62.7t$$

문제 20. RC 회로에서 $R = 3k\Omega$, $C = 0.33\mu F$, 초기 전압 0, 입력 전압 12V가 인가될 때 축전기 전압을 구하시오.

풀이: 시간 상수:

$$\tau = 3000 \times 0.33 \times 10^{-6} = 0.00099 \text{ s}$$

해:

$$v_C(t) = 12(1 - e^{-\frac{t}{0.00099}}) = 12(1 - e^{-1010t})$$

해설: - 매우 빠른 축전기 충전 응답 - 초기 전압 0에서 12V까지 급격하게 상승

답:

$$v_C(t) = 12(1 - e^{-1010t})$$