

## 라플라스 변환 고급 문제 20제 (난이도: 극악)

문제 1. 함수  $f(t) = t^3 e^{-2t} \sin 3t$ 의 라플라스 변환을 구하시오.

풀이: 먼저, 기본 함수  $e^{at} \sin \omega t$ 의 라플라스 변환은

$$F(s) = \frac{\omega}{(s-a)^2 + \omega^2}$$

입니다. 여기서  $a = -2$ ,  $\omega = 3$ 이므로

$$F(s) = \frac{3}{(s+2)^2 + 9}$$

다음으로  $t^3$ 가 곱해져 있으므로, 라플라스 변환에서

$$\mathcal{L}\{t^n f(t)\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(s)$$

를 사용하여 세 번 미분해야 합니다. 따라서,

$$\mathcal{L}\{t^3 e^{-2t} \sin 3t\} = (-1)^3 \frac{d^3}{ds^3} \left( \frac{3}{(s+2)^2 + 9} \right) = -\frac{d^3}{ds^3} F(s)$$

해설: 1. 기본 함수의 변환식은  $s$ 축이  $-a$ 만큼 이동된 형태이다. 2.  $t^3$  곱셈은 변환함수를 세 번 미분하는 것으로 표현된다. 3. 변환함수가 분모의 다항식 형태이므로, 연쇄 법칙과 몫의 미분법을 반복 적용해야 하며, 각 단계에서 미분 결과를 꼼꼼히 정리해야 한다. 4. 이 문제는 직접 세 번 미분 계산이 매우 복잡하며, 보통 수치 계산 프로그램이나 CAS를 이용하여 진행한다.

정답:

$$-\frac{d^3}{ds^3} \left( \frac{3}{(s+2)^2 + 9} \right)$$

문제 2. 함수  $f(t) = e^{4t} t^2 \cos 5t$ 의 라플라스 변환을 구하시오.

풀이: 먼저 기본 함수인  $e^{at} \cos \omega t$ 의 라플라스 변환은

$$F(s) = \frac{s-a}{(s-a)^2 + \omega^2}$$

여기서  $a = 4$ ,  $\omega = 5$  이므로,

$$F(s) = \frac{s-4}{(s-4)^2 + 25}$$

$t^2$  곱셈은 변환함수를 두 번 미분하는 것으로 나타난다:

$$\mathcal{L}\{t^2 f(t)\} = \frac{d^2}{ds^2} F(s)$$

해설: 1. 변환함수  $F(s)$ 는 분수 함수이며, 두 번 미분할 때 몫의 미분법을 반복해서 적용해야 한다. 2. 분자와 분모의 복잡한 미분으로 인해 계산량이 많으며, 각 미분 결과는 체계적으로 정리한다. 3. 수학적 정확성을 위해 미분 기호 및 연산 규칙을 엄격히 준수해야 한다.

정답:

$$\frac{d^2}{ds^2} \left( \frac{s-4}{(s-4)^2 + 25} \right)$$

**문제 3.** 함수  $f(t) = t^4 e^{-3t}$ 의 라플라스 변환을 구하시오.

**풀이:**  $t^n e^{at}$ 의 라플라스 변환 공식은

$$\mathcal{L}\{t^n e^{at}\} = \frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$$

여기서  $n = 4$ ,  $a = -3$ 이므로,

$$\mathcal{L} = \frac{4!}{(s+3)^5} = \frac{24}{(s+3)^5}$$

**해설:** 1. 다항식 차수가 높아질수록 분모의 거듭제곱 차수도 같이 증가한다. 2. 계수  $n!$ 는  $n$  차수에 따라 증가하며, 계산에 주의해야 한다.

**정답:**

$$\frac{24}{(s+3)^5}$$

**문제 4.** 함수  $f(t) = \frac{t \sin 2t - \sin t}{t}$ 의 라플라스 변환을 구하시오.

**풀이:** 우선  $\frac{\sin at}{t}$ 의 라플라스 변환은

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\sin at}{t}\right\} = \tan^{-1}\left(\frac{a}{s}\right)$$

이므로,

$$\mathcal{L}\{t \sin 2t/t\} = \tan^{-1}\left(\frac{2}{s}\right)$$

$$\mathcal{L}\{\sin t/t\} = \tan^{-1}\left(\frac{1}{s}\right)$$

따라서 전체 함수 변환은

$$\tan^{-1}\left(\frac{2}{s}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{1}{s}\right)$$

**해설:** 1. 두 항의 라플라스 변환은 각각의 정의를 이용해 별도로 계산한다. 2. 특수 함수인  $\frac{\sin at}{t}$ 의 변환식을 반드시 기억해야 한다.

**정답:**

$$\tan^{-1}\left(\frac{2}{s}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{1}{s}\right)$$

**문제 5.** 함수  $f(t) = te^{-t} \cosh 3t$ 의 라플라스 변환을 구하시오.

**풀이:**

$$\cosh at = \frac{e^{at} + e^{-at}}{2}$$

따라서

$$f(t) = te^{-t} \frac{e^{3t} + e^{-3t}}{2} = \frac{t}{2} (e^{2t} + e^{-4t})$$

라플라스 변환 선형성으로

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{2} (\mathcal{L}\{te^{2t}\} + \mathcal{L}\{te^{-4t}\})$$

각 항은

$$\mathcal{L}\{te^{at}\} = \frac{1}{(s-a)^2}$$

따라서

$$= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{(s-2)^2} + \frac{1}{(s+4)^2} \right)$$

**해설:** 1. 쌍곡선 코사인 함수를 지수 함수의 합으로 분해한다. 2.  $te^{at}$  함수의 변환식을 각각 적용한다. 3. 선형성을 이용해 합의 변환을 구한다.

**정답:**

$$\frac{1}{2} \left( \frac{1}{(s-2)^2} + \frac{1}{(s+4)^2} \right)$$

**문제 6.** 함수  $f(t) = t^2 \frac{\sin 3t}{t}$ 의 라플라스 변환을 구하시오.

**풀이:** 우선

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\sin 3t}{t}\right\} = \tan^{-1}\left(\frac{3}{s}\right)$$

$t^2$  곱셈은 두 번 미분에 해당한다:

$$\mathcal{L}\{t^2 g(t)\} = \frac{d^2}{ds^2} G(s)$$

따라서

$$\mathcal{L}\left\{t^2 \frac{\sin 3t}{t}\right\} = \frac{d^2}{ds^2} \left( \tan^{-1}\left(\frac{3}{s}\right) \right)$$

**해설:** 1. 함수 내부의 특수함수 변환 후,  $t^2$  곱셈에 의한 미분을 신중하게 계산한다. 2.  $\tan^{-1}(x)$  함수의 미분 법칙도 필요하다.

**정답:**

$$\frac{d^2}{ds^2} \left( \tan^{-1}\left(\frac{3}{s}\right) \right)$$

**문제 7.** 함수  $f(t) = u(t-2) \cdot (t-2)^3 e^{-t}$ 의 라플라스 변환을 구하시오.

**풀이:** 단위 계단 시간 이동 정리에 의해,

$$\mathcal{L} = e^{-2s} \mathcal{L}\{t^3 e^{-t}\} = e^{-2s} \cdot \frac{6}{(s+1)^4}$$

**해설:** 1. 시간 이동으로 인해 변환함수에 지수  $e^{-2s}$ 가 곱해진다. 2. 다항식과 지수 함수 곱의 변환 공식 적용에 주의한다.

**정답:**

$$e^{-2s} \frac{6}{(s+1)^4}$$

**문제 8.** 함수  $f(t) = e^{-2t} t \cos 3t$ 의 라플라스 변환을 구하시오.

**풀이:** 기본 변환:

$$F(s) = \frac{s+2}{(s+2)^2+9}$$

$t$  곱셈은 변환함수를  $-$  미분한 결과이다:

$$\mathcal{L} = -\frac{d}{ds}F(s)$$

**해설:** 1. 분수 함수 미분 시 몫의 미분법을 적용한다. 2.  $t$  곱셈은 변환함수의 부호 있는 미분임을 잊지 않는다.

**정답:**

$$-\frac{d}{ds} \left( \frac{s+2}{(s+2)^2+9} \right)$$

**문제 9.** 함수  $f(t) = e^{3t} \frac{\sin 2t}{t}$ 의 라플라스 변환을 구하시오.

**풀이:** 기본 함수  $\frac{\sin at}{t}$ 의 변환은

$$\tan^{-1} \left( \frac{a}{s} \right)$$

지수 함수 곱으로  $s$ 가  $s-3$ 으로 이동한다:

$$\mathcal{L} = \tan^{-1} \left( \frac{2}{s-3} \right)$$

**해설:** 1. 특수 함수의 변환식과 지수 이동 정리를 결합하여 정확한 결과 도출. 2. 변환 변수 이동 시 분모와 분자 형태에 유의한다.

**정답:**

$$\tan^{-1} \left( \frac{2}{s-3} \right)$$

**문제 10.** 함수  $f(t) = t^3 e^{-t} \cos 2t$ 의 라플라스 변환을 구하시오.

**풀이:** 기본 변환:

$$F(s) = \frac{s+1}{(s+1)^2+4}$$

$t^3$  곱셈은 세 번 미분:

$$\mathcal{L} = (-1)^3 \frac{d^3}{ds^3} F(s) = -\frac{d^3}{ds^3} F(s)$$

**해설:** 1. 미분법 중 몫의 미분법을 3회 반복하여 정확한 값을 구해야 한다. 2. 실전 계산은 수학 소프트웨어를 이용하는 것을 권장한다.

**정답:**

$$-\frac{d^3}{ds^3} \left( \frac{s+1}{(s+1)^2+4} \right)$$

**문제 11.** 함수  $f(t) = te^{2t} \sinh 3t$ 의 라플라스 변환을 구하시오.

**풀이:**

$$\sinh at = \frac{e^{at} - e^{-at}}{2}$$

따라서

$$f(t) = te^{2t} \cdot \frac{e^{3t} - e^{-3t}}{2} = \frac{t}{2} (e^{5t} - e^{-t})$$

라플라스 변환 선형성 적용:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\mathcal{L}\{te^{5t}\} - \mathcal{L}\{te^{-t}\})$$

각 항은

$$\mathcal{L}\{te^{at}\} = \frac{1}{(s-a)^2}$$

따라서

$$\frac{1}{2} \left( \frac{1}{(s-5)^2} - \frac{1}{(s+1)^2} \right)$$

**해설:** 1. 쌍곡선 사인 함수의 정의식을 사용하여 지수 함수의 차로 변환. 2.  $te^{at}$  형태 각각에 변환 공식을 적용하고, 차 형태로 결과를 도출.

**정답:**

$$\frac{1}{2} \left( \frac{1}{(s-5)^2} - \frac{1}{(s+1)^2} \right)$$

**문제 12.** 함수  $f(t) = u(t-1) \cdot (t-1)e^{3(t-1)}$ 의 라플라스 변환을 구하시오.

**풀이:** 단위 계단 시간 이동 정리:

$$\mathcal{L} = e^{-s} \mathcal{L}\{te^{3t}\}$$

기본 변환:

$$\mathcal{L}\{te^{at}\} = \frac{1}{(s-a)^2}$$

따라서

$$\mathcal{L} = e^{-s} \cdot \frac{1}{(s-3)^2}$$

**해설:** 1. 시간 이동으로 변환함수에  $e^{-s}$ 가 곱해진다. 2. 기본 함수의 변환식을 활용하여 정확한 결과 도출.

**정답:**

$$e^{-s} \frac{1}{(s-3)^2}$$

**문제 13.** 함수  $f(t) = t^2 e^{-t} \cos 4t$ 의 라플라스 변환을 구하시오.

**풀이:** 기본 변환:

$$F(s) = \frac{s+1}{(s+1)^2 + 16}$$

$t^2$  곱셈에 따라 두 번 미분:

$$\mathcal{L} = \frac{d^2}{ds^2} F(s)$$

**해설:** 1. 미분 시 몫의 미분법과 연쇄법칙을 철저히 적용해야 한다. 2. 두 번 미분이므로 계산량이 많으며, 체계적 계산이 필요하다.

정답:

$$\frac{d^2}{ds^2} \left( \frac{s+1}{(s+1)^2 + 16} \right)$$

문제 14. 함수  $f(t) = \frac{\sin 5t}{t} \cdot e^{-3t}$ 의 라플라스 변환을 구하시오.

풀이: 기본 변환:

$$\mathcal{L} \left\{ \frac{\sin at}{t} \right\} = \tan^{-1} \left( \frac{a}{s} \right)$$

지수 함수 곱으로  $s \rightarrow s+3$  이동, 따라서

$$\mathcal{L} = \tan^{-1} \left( \frac{5}{s+3} \right)$$

해설: 1. 특수 함수 변환 공식과 지수 이동 변환 공식 결합. 2. 변수 이동 후 함수의 분모 및 분자 변화에 주의.

정답:

$$\tan^{-1} \left( \frac{5}{s+3} \right)$$

문제 15. 함수  $f(t) = t^3 \cosh 2t$ 의 라플라스 변환을 구하시오.

풀이:

$$\cosh 2t = \frac{e^{2t} + e^{-2t}}{2}$$

따라서

$$f(t) = \frac{t^3}{2}(e^{2t} + e^{-2t}) = \frac{t^3 e^{2t}}{2} + \frac{t^3 e^{-2t}}{2}$$

각 항의 변환은

$$\mathcal{L}\{t^3 e^{at}\} = \frac{6}{(s-a)^4}$$

따라서

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left( \frac{6}{(s-2)^4} + \frac{6}{(s+2)^4} \right) = 3 \left( \frac{1}{(s-2)^4} + \frac{1}{(s+2)^4} \right)$$

해설: 1. 쌍곡선 코사인 함수 표현식을 사용하여 지수 함수 합으로 분리. 2. 고차 다항식과 지수 함수의 변환 공식 적용.

정답:

$$3 \left( \frac{1}{(s-2)^4} + \frac{1}{(s+2)^4} \right)$$

문제 16. 함수  $f(t) = te^{-4t} \sin 5t$ 의 라플라스 변환을 구하시오.

풀이: 기본 변환:

$$F(s) = \frac{5}{(s+4)^2 + 25}$$

$t$  곱셈은 부호가 있는 미분, 즉

$$\mathcal{L} = -\frac{d}{ds}F(s)$$

**해설:** 1. 미분 시 몫의 미분법을 적용하며, 부호 변화에 주의. 2.  $t$  곱셈의 변환법칙과 기본 함수 변환식을 정확히 이해해야 한다.

**정답:**

$$-\frac{d}{ds} \left( \frac{5}{(s+4)^2 + 25} \right)$$

**문제 17.** 함수  $f(t) = u(t-4) \cdot (t-4)^2 \sin(t-4)$ 의 라플라스 변환을 구하시오.

**풀이:** 단위 계단 시간 이동 정리로

$$\mathcal{L} = e^{-4s} \cdot \mathcal{L}\{t^2 \sin t\}$$

기본 변환:

$$\mathcal{L}\{t^n \sin \omega t\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} \left( \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \right)$$

여기서  $n = 2, \omega = 1$ 이므로

$$\mathcal{L} = e^{-4s} \cdot \frac{d^2}{ds^2} \left( \frac{1}{s^2 + 1} \right)$$

**해설:** 1. 시간 지연에 따라 변환함수에 지수곱  $e^{-4s}$ 가 발생. 2.  $t^2 \sin t$ 의 변환은 두 번 미분으로 표현. 3. 미분 시 분모의 함수 형태를 정확히 파악해 적용한다.

**정답:**

$$e^{-4s} \frac{d^2}{ds^2} \left( \frac{1}{s^2 + 1} \right)$$

**문제 18.** 함수  $f(t) = t^3 e^{-3t} \sin 2t$ 의 라플라스 변환을 구하시오.

**풀이:** 기본 변환:

$$F(s) = \frac{2}{(s+3)^2 + 4}$$

$t^3$  곱셈은 세 번 미분:

$$\mathcal{L} = (-1)^3 \frac{d^3}{ds^3} F(s) = -\frac{d^3}{ds^3} F(s)$$

**해설:** 1. 미분법을 3회 적용하며, 몫의 미분법과 연쇄법칙을 조합한다. 2. 복잡한 미분 과정이므로 신중한 계산과 검산이 필수.

**정답:**

$$-\frac{d^3}{ds^3} \left( \frac{2}{(s+3)^2 + 4} \right)$$

**문제 19.** 함수  $f(t) = e^t \cdot \frac{\sin 6t}{t}$ 의 라플라스 변환을 구하시오.

**풀이:** 기본 함수  $\frac{\sin at}{t}$ 의 라플라스 변환:

$$\tan^{-1} \left( \frac{a}{s} \right)$$

지수 함수 곱으로 변환 변수  $s \rightarrow s - 1$  이동:

$$\mathcal{L} = \tan^{-1} \left( \frac{6}{s-1} \right)$$

**해설:** 1. 특수 함수 변환에 지수 이동 정리를 적용한다. 2. 변수 이동에 따른 함수 형태 변화에 유의한다.

**정답:**

$$\tan^{-1} \left( \frac{6}{s-1} \right)$$

**문제 20.** 함수  $f(t) = t^4 \cos 3t$ 의 라플라스 변환을 구하시오.

**풀이:** 기본 변환:

$$F(s) = \frac{s}{s^2 + 9}$$

$t^4$  곱셈은 네 번 미분, 따라서

$$\mathcal{L} = \frac{d^4}{ds^4} F(s)$$

**해설:** 1. 고차 미분은 몫의 미분법과 연쇄법칙을 반복 적용해야 한다. 2. 매우 복잡한 계산이므로 수학 소프트웨어를 활용하는 것이 효율적이다.

**정답:**

$$\frac{d^4}{ds^4} \left( \frac{s}{s^2 + 9} \right)$$