보드선도 고급 문제 20제

문제 1

다음 전달함수

$$H(s) = \frac{(s/10+1)^2}{s(s/100+1)(s^2/400+s/20+1)}$$

의 보드선도에서 각 극점과 영점이 크기 및 위상에 미치는 영향을 상세히 분석하고, 특히 2차 복소공진 극점이 전체 응답에 미치는 영향을 설명하시오.

풀이

영점은 s = -10에 2개 중복되어 있습니다.

각 영점은 크기 보드선도에서 +20 dB/decade 기울기 변화를 일으킵니다.

위상은 +90도씩 증가시킵니다.

극점은 $s=0,\,s=-100,\,$ 그리고 2차 복소공진 극점이 있습니다.

0 극점은 -20 dB/decade, -90도 위상 변화를 유발합니다.

-100 극점 역시 -20 dB/decade, -90도 위상 변화를 줍니다.

2차 복소공진 극점의 근은

$$s = -10 \pm i17.32$$

이며, 이는 자연 진동수 $\omega_n = 20$, 감쇠비 $\zeta = 0.5$ 를 가진 것입니다.

이 복소공진 극점은 공진 주파수 부근에서 급격한 크기 증폭과 위상 변화를 초래합니다.

특히 $\omega \approx 17.32~{
m rad/s}$ 근처에서 공진 피크가 나타나며, 위상은 급격히 약 -180도까지 떨어졌다가 다시 상승합니다.

해설

저주파 영역에서 s = 0 극점은 신호를 크게 감쇠시킵니다.

영점 2개는 $\omega = 10 \text{ rad/s}$ 부터 크기를 +40 dB/decade로 상승시키는 역할을 합니다.

-100 극점은 고주파 영역에서 다시 크기를 감소시킵니다.

복소공진 극점은 고유 진동 모드를 나타내며,

공진 주파수 근처에서 매우 뚜렷한 크기 피크와 급격한 위상 변동을 발생시킵니다.

감쇠비 0.5는 중간 정도의 감쇠로서, 공진 피크가 뚜렷하지만 급격한 발산은 아닙니다.

답

- 저주파: 기울기 -20 dB/decade, 위상 약 -90도
- $-\omega > 10 \text{ rad/s}$: 영점 영향으로 +40 dB/decade 기울기 증가, 위상 +180도 상승
- $\omega \approx 17.32 \text{ rad/s}$: 공진 피크 및 위상 급변
- 고주파: -100 극점 영향으로 기울기 -20 dB/decade 감소
- 전체 위상 변화 약 -270도 내외

문제 2

전달함수

$$H(s) = \frac{(s/5+1)^3(s+20)}{s^2(s/50+1)^2}$$

의 고주파수 영역 크기 기울기와 위상 한계값을 구하고, 각 극점과 영점의 영향이 중첩되는 부분에서 발생하는 보드선도 왜곡을 설명하시오.

풀이

영점은 $\omega=5~\mathrm{rad/s}$ 에 3개 중첩되어 있고,

추가로 $\omega = 20 \text{ rad/s}$ 에 1개가 존재합니다.

극점은 0주파수에 2중 극점과 $\omega = 50 \; \mathrm{rad/sM} \; 2$ 중 극점이 있습니다. 고주파 기울기는

$$20 \times (4-4) = 0 \text{ dB/decade}$$

로 상쇄됩니다. 위상 한계도

$$90^{\circ} \times (4-4) = 0^{\circ}$$

입니다.

그러나 코너 주파수들이 서로 달라 중첩된 극점과 영점 영향이 겹치는 영역에서 크기와 위상이 비선형적으로 변화합니다.

해설

중첩된 극점과 영점이 서로 상쇄 효과를 갖지만,

각 코너 주파수의 차이로 인해 보드선도는 이상적인 직선 대신 곡선 형태로 왜곡됩니다.

저주파에서는 0주파수 2중 극점이 강한 감쇠를 만들고,

중주파에서는 영점이 기울기를 상승시키며,

고주파에서는 다시 극점이 기울기를 감소시킵니다.

답

- 고주파 크기 기울기: 0 dB/decade
- 고주파 위상 한계: 0도
- 중첩된 극점과 영점 영향으로 보드선도는 비선형 왜곡 발생

문제 3

전달함수

$$H(s) = \frac{1}{(s/1+1)^2(s/10+1)}$$

의 저주파 및 중간주파 영역에서 크기 및 위상 보드선도의 변화를 설명하고, 각 극점의 차수가 크기와 위상에 미치는 영향을 분석하시오.

풀이

이 함수는 극점이 두 개가 1 rad/s에서 중첩되어 있고, 하나가 10 rad/s에 있습니다.

각 극점은 크기 보드선도에서 -20 dB/decade씩 기울기를 증가시키므로,

1 rad/s 이후 기울기는 -40 dB/decade, 10 rad/s 이후 -60 dB/decade가 됩니다.

위상 변화는 각 극점당 -90도씩이며

1 rad/s부터 약간씩 위상이 감소하기 시작해,

2중 극점에서 최대 -180도, 10 rad/s 극점에서 -270도에 도달합니다.

해설

중첩된 극점은 크기 보드선도에서 기울기를 두 배로 증가시키고,

위상에서는 각각 -90도의 변화를 합산하여 최대 -180도를 나타냅니다.

따라서 저주파에서 중간 주파수까지 급격한 크기 감소와 위상 감소가 나타납니다.

10 rad/s 극점은 추가적으로 기울기와 위상을 더 낮춰 최종 기울기와 위상 변화를 완성합니다.

답

- 저주파: 거의 0 dB/decade, 0도 위상
- 1 rad/s 10 rad/s: 기울기 -40 dB/decade, 위상 약 -180도
- 10 rad/s 이상: 기울기 -60 dB/decade, 위상 약 -270도

문제 4

다음 전달함수의 크기 및 위상 보드선도를 작성할 때, 각 영점과 극점이 영향을 미치는 주파수 영역을 구분하고, 각 구간에서 기울기 변화 및 위상 변화를 구하시오.

$$H(s) = \frac{(s/2+1)(s/20+1)^2}{s(s/50+1)^3}$$

풀이

영점은 2 rad/s와 20 rad/s에 각각 하나와 두 개가 있습니다.

극점은 0 rad/s에 하나, 50 rad/s에 세 개가 있습니다.

기본 기울기는 $20 \times (9점 \% - 3 \% + 3) = 20 \times (3 - 4) = -20 \text{ dB/decade 입니다.}$

2 rad/s부터 기울기가 +20 dB/decade 증가하고,

20 rad/s부터 +40 dB/decade 추가 증가합니다.

50 rad/s부터 -60 dB/decade로 크게 감소합니다.

위상도 각 극점/영점별 90도씩 상승 혹은 감소합니다.

해설

저주파 영역에서는 극점 영향으로 감소하며,

2 rad/s부터 영점 영향으로 증가세를 보입니다.

20 rad/s에서는 영점 2개가 중첩되어 있어 더 큰 상승 효과가 나타납니다.

50 rad/s의 세 극점은 급격한 감소를 일으켜 전체 응답을 낮춥니다.

답

- 0 2 rad/s: 기울기 -20 dB/decade, 위상 -90도

- 2 20 rad/s: 기울기 0 dB/decade, 위상 0도

- 20 50 rad/s: 기울기 +40 dB/decade, 위상 +180도

- 50 rad/s 이상: 기울기 -20 dB/decade, 위상 -90도

문제 5

전달함수

$$H(s) = \frac{s+5}{(s+1)^2(s^2+2s+2)}$$

의 보드선도에서 복소공진 극점의 위치와 감쇠비를 구하고, 공진 주파수 근처에서의 크기 및 위상 변화를 해석 하시오.

품이

복소공진 극점은 $s^2+2s+2=0$ 에서 유도됩니다. 근은

$$s = -1 \pm j1$$

이며, 자연진동수 $\omega_n = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \approx 1.414 \text{ rad/s},$ 감쇠비 $\zeta = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0.707$ 입니다. 공진 주파수 근처에서 크기는 약간의 공진 피크가 나타나며, 위상은 -180도 근처에서 급격히 변합니다.

해설

감쇠비 0.707은 임계 감쇠와 진동 사이로, 공진 현상이 있으나 폭이 넓고 뾰족하지 않은 피크가 나타납니다. 영점 s = -5는 저주파 영역에서 증가 기울기를 만듭니다. 극점들의 영향으로 고주파 영역에서 크기 감소와 위상 하락이 일어납니다.

답

- 공진 주파수 약 1.414 rad/s
- 감쇠비 약 0.707
- 공진 부근에서 크기 약간 상승, 위상 급변
- 저주파에서 증가, 고주파에서 감소

문제 6

전달함수

$$H(s) = \frac{(s/0.1+1)}{(s/0.01+1)^3}$$

의 저주파 영역과 고주파 영역에서 크기 및 위상 보드선도의 기울기와 한계값을 구하시오.

풀이

영점은 0.1 rad/s, 극점은 0.01 rad/s에 3개 있습니다.

저주파 영역에서는 극점 3개의 영향으로 -60 dB/decade 기울기, -270도 위상 변화가 예상됩니다.

0.01 rad/s 이후로는 크기와 위상이 급격히 변화하기 시작합니다.

0.1 rad/s 영점은 기울기를 +20 dB/decade, 위상을 +90도 증가시켜 최종 기울기는 -40 dB/decade, 위상은 -180도로 완화됩니다.

해설

저주파에서는 극점이 압도적으로 영향력 있어 크기 감소 및 위상 하락을 유발합니다. 영점은 더 높은 주파수에서 영향을 주어 기울기와 위상을 일부 상쇄시킵니다.

답

- 저주파: 기울기 -60 dB/decade, 위상 -270도
- 0.1 rad/s 이상: 기울기 -40 dB/decade, 위상 -180도

문제 7

전달함수

$$H(s) = \frac{1}{s(s+1)^2(s^2+4s+20)}$$

의 공진 주파수와 감쇠비를 구하고, 크기 및 위상 보드선도에서 공진 효과를 해석하시오.

풀이

복소공진 극점의 근은

$$s^2 + 4s + 20 = 0$$

로부터

$$s = -2 \pm i4$$

입니다.

자연진동수 $\omega_n = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{20} \approx 4.472 \text{ rad/s},$ 감쇠비 $\zeta = \frac{2}{\sqrt{20}} = \frac{2}{4.472} \approx 0.447$ 입니다. 공진 주파수에서 크기는 뚜렷한 피크가 발생하며, 위상은 급격한 하락 후 점진적 회복을 보입니다.

해설

감쇠비가 0.447로 비교적 낮아 공진 현상이 강하게 나타납니다. 복소공진 극점 근처에서 큰 진폭 증폭이 일어나며, 이로 인해 보드선도에서 크기 피크와 위상 급변이 관찰됩니다.

답

- 공진 주파수 약 4.472 rad/s
- 감쇠비 약 0.447
- 공진 주파수 근처에서 크기 피크 및 위상 급격한 변동

문제 8

전달함수

$$H(s) = \frac{(s/3+1)^2}{(s/0.5+1)(s/15+1)^3}$$

의 보드선도에서 각 극점과 영점의 영향 구간과 그 크기, 위상 변화를 상세히 구분하시오.

풀이

영점 2개는 3 rad/s에, 극점 1개는 0.5 rad/s에, 3개는 15 rad/s에 위치합니다. 기본 기울기는 $20 \times (2-4) = -40 \text{ dB/decade}$ 입니다. 0.5 rad/s에서 기울기 -20 dB/decade 시작, 3 rad/s에서 +40 dB/decade 증가, 15 rad/s에서 -60 dB/decade 감소합니다. 위상 변화는 각 극점과 영점마다 90도씩 상승 혹은 감소합니다.

해설

저주파부터 0.5 rad/s까지 기울기 0 dB/decade, 0.5 3 rad/s는 기울기 -20 dB/decade 감소, 3 15 rad/s는 영점 영향으로 기울기 +20 dB/decade 상승해 총 -40+40=-0 dB/decade, 15 rad/s 이상에서는 극점 영향으로 다시 크게 감소합니다.

답

- 0 0.5 rad/s: 0 dB/decade
- 0.5 3 rad/s: -20 dB/decade
- 3 15 rad/s: 0 dB/decade
- 15 rad/s 이상: -60 dB/decade

문제 9

전달함수

$$H(s) = \frac{(s+1)(s+10)}{s(s+5)^2}$$

의 보드선도를 그리고 각 코너주파수별 기울기 변화를 설명하시오.

풀이

극점과 영점의 위치는 0, 1, 5, 10 rad/s 입니다.

각 극점과 영점은 20 dB/decade씩 기울기 변화를 만듭니다. 저주파에서 0 극점의 -20 dB/decade 시작, 1 rad/s 영점에서 +20 dB/decade, 5 rad/s 극점 2개에서 -40 dB/decade,

10 rad/s 영점에서 +20 dB/decade 변화가 나타납니다.

해설

초기 기울기는 -20 dB/decade에서 시작해,

1 rad/s에서 상쇄되어 0 dB/decade가 되고,

5 rad/s에서 급격히 -40 dB/decade로 감소,

10 rad/s에서 다시 +20 dB/decade 상승해 최종 -20 dB/decade가 됩니다.

답

- 저주파: -20 dB/decade

- 1 rad/s 5 rad/s: 0 dB/decade

- 5 rad/s 10 rad/s: -40 dB/decade

- 10 rad/s 이상: -20 dB/decade

문제 10

전달함수

$$H(s) = \frac{(s/2+1)^3}{(s/0.1+1)(s/5+1)^2}$$

의 각 코너주파수에서 크기 및 위상 기울기 변화를 설명하시오.

풀이

영점 3개는 2 rad/s, 극점은 0.1 rad/s 1개, 5 rad/s 2개에 위치합니다.

기본 기울기는 $20 \times (3 - 3) = 0$ dB/decade 입니다.

0.1 rad/s에서 -20 dB/decade 시작,

2 rad/s에서 +60 dB/decade 상승,

5 rad/s에서 -40 dB/decade 감소합니다.

해설

처음 극점 1개 영향으로 감소 시작,

2 rad/s에서 영점 3개가 기울기를 크게 올려 기울기 상승,

5 rad/s에서 극점 2개 영향으로 기울기가 다시 감소해 전체 균형 유지합니다.

답

- 0 0.1 rad/s: 0 dB/decade

- 0.1 2 rad/s: -20 dB/decade

- 2 5 rad/s: +40 dB/decade (순 기울기 40 dB/decade 상승)

- 5 rad/s 이상: 0 dB/decade

문제 11

다음 전달함수

$$H(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 10}$$

의 복소공진 극점의 공진주파수와 감쇠비를 구하고, 보드선도에서 공진 효과를 설명하시오.

풀이

복소공진 극점은

$$s^2 + 2s + 10 = 0$$

에서

$$s = -1 \pm i3$$

이며, 자연진동수 $\omega_n=\sqrt{1^2+3^2}=\sqrt{10}\approx 3.16~\mathrm{rad/s},$ 감쇠비 $\zeta=\frac{1}{\sqrt{10}}\approx 0.316$ 입니다. 공진주파수 부근에서 크기 피크가 강하게 나타납니다.

해설

감쇠비 0.316은 낮은 감쇠로 뚜렷한 공진 피크 발생 원인입니다. 복소공진 극점 영향으로 크기는 공진 부근에서 급증하고, 위상은 급격한 변화를 겪습니다.

답

- 공진 주파수 약 3.16 rad/s
- 감쇠비 약 0.316
- 공진 부근에서 크기 급증 및 위상 급변

문제 12

전달함수

$$H(s) = \frac{(s/0.5+1)(s+10)}{(s+1)^3}$$

의 저주파 및 고주파에서 보드선도 기울기 변화를 구하고 해석하시오.

풀이

영점은 0.5 rad/s와 10 rad/s, 극점은 1 rad/s 3개가 있습니다. 저주파에서는 극점 3개 영향으로 -60 dB/decade 감소, 0.5 rad/s 영점에서 +20 dB/decade 상승, 10 rad/s 영점에서 +20 dB/decade 추가 상승해 최종 기울기는 -20 dB/decade입니다.

해설

저주파에서 극점이 지배적이지만, 영점이 고주파에서 상승 효과를 줍니다. 결과적으로 기울기는 저주파에서 급격히 감소하다가 고주파로 갈수록 완만해집니다.

답

- 저주파: -60 dB/decade
- -0.5 10 rad/s: -40 dB/decade
- 10 rad/s 이상: -20 dB/decade

문제 13

전달함수

$$H(s) = \frac{(s+2)^2}{s^2(s+1)}$$

의 저주파, 중간주파, 고주파 구간별 크기 및 위상 기울기를 구하시오.

풀이

영점 2개는 2 rad/s, 극점 2개는 0 rad/s, 극점 1개는 1 rad/s 위치합니다. 저주파는 s=0 극점 2개 영향으로 -40 dB/decade 감소, 2 rad/s에서 영점 2개 영향으로 +40 dB/decade 상승해 기울기 0 dB/decade, 1 rad/s 극점 하나 영향으로 -20 dB/decade 감소하는 점을 고려해 구간별 기울기를 산출합니다.

해설

저주파에서는 극점이 우세하지만, 영점이 상승 효과를 주면서 중간에 상쇄됩니다. 1 rad/s 이후 추가 극점 영향으로 다시 감소하는 패턴입니다.

답

- -0 1 rad/s: -40 dB/decade
- 1 2 rad/s: -60 dB/decade (극점 3개 영향)
- 2 rad/s 이상: -20 dB/decade

문제 14

전달함수

$$H(s) = \frac{(s/1+1)(s/10+1)^2}{(s/0.1+1)^2(s/100+1)}$$

의 보드선도에서 주요 코너주파수에서 기울기 변화를 구하고 해석하시오.

풀이

영점 1개는 1 rad/s, 2개는 10 rad/s, 극점 2개는 0.1 rad/s, 1개는 100 rad/s입니다. 기본 기울기는 20 × (3 - 3) = 0 dB/decade 입니다. 0.1 rad/s 극점 2개로 -40 dB/decade 감소, 1 rad/s 영점 1개로 +20 dB/decade 상승, 10 rad/s 영점 2개로 +40 dB/decade 상승, 100 rad/s 극점 1개로 -20 dB/decade 감소합니다.

해설

저주파에선 극점 영향으로 감소하지만, 중간 주파수에선 영점이 상승 효과를 가져와 기울기를 증가시킵니다. 고주파에서 다시 감소합니다.

답

- -0 0.1 rad/s: 0 dB/decade
- 0.1 1 rad/s: -40 dB/decade
- 1 10 rad/s: -20 dB/decade
- 10 100 rad/s: +20 dB/decade
- 100 rad/s 이상: 0 dB/decade

문제 15

전달함수

$$H(s) = \frac{1}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6}$$

의 극점 위치를 찾고, 각각이 보드선도에 미치는 영향을 설명하시오.

풀이

다항식의 근을 찾으면 극점은

$$s = -1, -2, -3$$

입니다.

각 극점은 실수 단극점이며, 저주파에서 각각 -20 dB/decade, -90도 위상 변화를 줍니다.

해설

극점이 세 개이므로 기울기는 총 -60 dB/decade, 위상은 -270도가 됩니다. 코너 주파수는 1, 2, 3 rad/s로 각각 크기와 위상 기울기가 변합니다.

답

- 극점 3개: 각각 1, 2, 3 rad/s
- 저주파 기울기 변화: 점진적 -20 dB/decade씩 증가
- 위상 변화: 총 -270도

문제 16

전달함수

$$H(s) = \frac{(s/5+1)^2}{s(s/0.1+1)(s/10+1)^2}$$

의 보드선도에서 각 극점과 영점의 영향과 기울기 변화를 구하시오.

풀이

영점 2개는 5 rad/s, 극점은 0 rad/s, 0.1 rad/s, 10 rad/s에 각각 1, 1, 2개입니다. 기본 기울기는 20 × (2 - 4) = -40 dB/decade 입니다.

0.1 rad/s에서 -20 dB/decade 감소,

5 rad/s에서 +40 dB/decade 상승,

10 rad/s에서 -40 dB/decade 감소합니다.

해설

초기에는 극점의 영향이 커 감소세가 강하며, 5 rad/s 영점 2개가 기울기를 상승시키고, 10 rad/s 극점 2개가 다시 감소시킵니다.

답

- 0 0.1 rad/s: -20 dB/decade

- 0.1 5 rad/s: -40 dB/decade

- 5 10 rad/s: 0 dB/decade

- 10 rad/s 이상: -40 dB/decade

문제 17

전달함수

$$H(s) = \frac{s^2 + 4s + 5}{(s+1)^3}$$

의 복소공진 영점 위치와 보드선도에서의 영향 및 해석을 설명하시오.

풀이

분자는

$$s^2 + 4s + 5 = 0$$

의 근으로 복소공진 영점이 있습니다. 근은

$$s = -2 \pm i1$$

로 자연진동수 $\omega_n=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}\approx 2.236,$ 감쇠비 $\zeta=\frac{2}{\sqrt{5}}\approx 0.894$ 입니다. 복소영점는 저주파에서 기울기 +40 dB/decade 상승과 위상 +180도 상승을 유발합니다.

해설

감쇠비가 높아 공진 피크는 없으며, 복소영점 영향으로 중주파에서 크기와 위상이 증가합니다. 극점 3개는 저주파에서 감소를 일으킵니다.

답

- 복소영점 주파수 약 2.236 rad/s
- 저주파 감소, 중주파 증가
- 위상은 약 +180도 상승

문제 18

전달함수

$$H(s) = \frac{(s/0.05+1)^4}{s^2(s/10+1)}$$

의 저주파, 중간, 고주파 영역에서 크기 및 위상 보드선도 변화를 설명하시오.

풀이

영점 4개는 0.05 rad/s, 극점 2개는 0 rad/s, 1개는 10 rad/s에 위치합니다. 저주파에서는 극점 2개 영향으로 -40 dB/decade 감소, 0.05 rad/s부터 영점 4개가 급격한 +80 dB/decade 상승을 일으킵니다. 10 rad/s 극점 하나가 고주파에서 -20 dB/decade 감소를 만듭니다.

해설

저주파 극점이 크기와 위상을 줄이나, 영점 영향으로 빠르게 상승하여 전체적으로 증가 경향이 나타납니다. 고주파에서 추가 극점 영향으로 다시 감소합니다.

답

- 0 0.05 rad/s: -40 dB/decade
- -0.05 10 rad/s: +40 dB/decade
- 10 rad/s 이상: +20 dB/decade

문제 19

전달함수

$$H(s) = \frac{s+3}{(s+1)^2(s+5)^2}$$

의 보드선도에서 기울기와 위상 변화 구간을 설명하시오.

풀이

영점은 3 rad/s에 1개, 극점은 1 rad/s 2개, 5 rad/s 2개가 있습니다. 기본 기울기는 $20 \times (1$ - 4) = -60 dB/decade 입니다.

1 rad/s에서 -40 dB/decade 감소,

3 rad/s 영점에서 +20 dB/decade 상승,

5 rad/s에서 -40 dB/decade 추가 감소가 일어납니다.

해설

처음부터 극점 영향이 강하며, 중간 3 rad/s 영점으로 잠시 상승하지만, 5 rad/s 극점으로 다시 크게 감소합니다.

답

- $0 ext{1 rad/s: -20 dB/decade}$

-1 3 rad/s: -40 dB/decade

-3 5 rad/s: -20 dB/decade

- 5 rad/s 이상: -60 dB/decade

문제 20

전달함수

$$H(s) = \frac{(s+4)^3}{s^3(s+2)}$$

의 보드선도에서 각 극점과 영점의 영향, 기울기 변화를 상세히 분석하시오.

풀이

영점 3개는 4 rad/s, 극점 3개는 0 rad/s, 1개는 2 rad/s에 위치합니다.

저주파에서 극점 3개로 -60 dB/decade 감소,

2 rad/s 극점 하나가 추가하여 -80 dB/decade 감소,

4 rad/s 영점 3개가 +60 dB/decade 상승하여 최종 기울기 -20 dB/decade로 완화됩니다.

해설

0 주파수 극점이 저주파에서 강력한 감쇠를 만듭니다.

2 rad/s 극점 하나가 중주파에서 추가 감쇠,

4 rad/s 영점 3개는 상승 효과를 만들어 기울기를 완화시킵니다.

답

- 0 2 rad/s: -60 dB/decade

- 2 4 rad/s: -80 dB/decade

- 4 rad/s 이상: -20 dB/decade