

고급 문제 20문제

문제 1

전달 함수

$$H(s) = \frac{s^3 + 6s^2 + 11s + 6}{s^3 + 7s^2 + 16s + 12}$$

에 대해 $\omega = 2 \text{ rad/s}$ 에서 크기와 위상 응답을 구하시오.

풀이

주파수 응답은 $s = j\omega$ 대입으로 구합니다. $\omega = 2$ 를 대입하면

분자:

$$(j2)^3 + 6(j2)^2 + 11(j2) + 6 = (j8) + 6(-4) + 11(j2) + 6 = j8 - 24 + j22 + 6 = (-18) + j30$$

분자 크기:

$$\sqrt{(-18)^2 + 30^2} = \sqrt{324 + 900} = \sqrt{1224} \approx 35.0$$

분자 위상:

$$\tan^{-1}\left(\frac{30}{-18}\right) = \tan^{-1}(-1.6667) \approx -59.04^\circ$$

실수부가 음수이고 허수부가 양수이므로 2사분면에 해당하며 위상은

$$180^\circ - 59.04^\circ = 120.96^\circ$$

분모:

$$(j2)^3 + 7(j2)^2 + 16(j2) + 12 = j8 + 7(-4) + j32 + 12 = j8 - 28 + j32 + 12 = (-16) + j40$$

분모 크기:

$$\sqrt{(-16)^2 + 40^2} = \sqrt{256 + 1600} = \sqrt{1856} \approx 43.07$$

분모 위상:

$$\tan^{-1}\left(\frac{40}{-16}\right) = \tan^{-1}(-2.5) \approx -68.20^\circ$$

역시 2사분면 위치이므로

$$180^\circ - 68.20^\circ = 111.8^\circ$$

전체 크기:

$$\frac{35.0}{43.07} \approx 0.812$$

전체 위상:

$$120.96^\circ - 111.8^\circ = 9.16^\circ$$

해설

3차 다항식의 복소수 대입으로 분자와 분모 모두 크기와 위상을 구해야 합니다. 실수부 음수, 허수부 양수인 경우 각도를 180도에서 빼주는 점에 유의합니다. 크기 계산은 피타고라스 정리, 위상 계산은 아크탄젠트와 사분면 판단이 핵심입니다.

답

$$|H(j2)| \approx 0.812, \quad \angle H(j2) \approx 9.16^\circ$$

문제 2

전달 함수

$$H(s) = \frac{s^2 + 4s + 8}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6}$$

에 대해 $\omega = 3 \text{ rad/s}$ 에서 크기와 위상 응답을 구하시오.

풀이

$s = j3$ 대입:

분자:

$$(j3)^2 + 4(j3) + 8 = -9 + 12j + 8 = (-1) + 12j$$

분자 크기:

$$\sqrt{(-1)^2 + 12^2} = \sqrt{1 + 144} = \sqrt{145} \approx 12.04$$

분자 위상:

$$\tan^{-1} \left(\frac{12}{-1} \right) = \tan^{-1}(-12) \approx -85.24^\circ$$

실수부 음수, 허수부 양수이므로

$$180^\circ - 85.24^\circ = 94.76^\circ$$

분모:

$$(j3)^3 + 6(j3)^2 + 11(j3) + 6 = j27 + 6(-9) + j33 + 6 = j27 - 54 + j33 + 6 = (-48) + j60$$

분모 크기:

$$\sqrt{(-48)^2 + 60^2} = \sqrt{2304 + 3600} = \sqrt{5904} \approx 76.85$$

분모 위상:

$$\tan^{-1} \left(\frac{60}{-48} \right) = \tan^{-1}(-1.25) \approx -51.34^\circ$$

실수부 음수, 허수부 양수로

$$180^\circ - 51.34^\circ = 128.66^\circ$$

전체 크기:

$$\frac{12.04}{76.85} \approx 0.157$$

전체 위상:

$$94.76^\circ - 128.66^\circ = -33.9^\circ$$

해설

분모 3차 다항식의 크기와 위상 계산이 복잡하며, 위상 사분면 판단에 주의해야 합니다. 분자와 분모의 위상차가 음수임을 확인해야 합니다.

답

$$|H(j3)| \approx 0.157, \quad \angle H(j3) \approx -33.9^\circ$$

문제 3

전달 함수

$$H(s) = \frac{5s^3 + 10s^2 + 15s + 20}{s^3 + 9s^2 + 27s + 27}$$

에 대해 $\omega = 1 \text{ rad/s}$ 에서 크기 및 위상 응답을 구하시오.

풀이

$s = j1$:

분자:

$$5(j1)^3 + 10(j1)^2 + 15(j1) + 20 = 5(j) + 10(-1) + 15(j) + 20 = j5 - 10 + j15 + 20 = 10 + j20$$

분자 크기:

$$\sqrt{10^2 + 20^2} = \sqrt{100 + 400} = \sqrt{500} \approx 22.36$$

분자 위상:

$$\tan^{-1} \left(\frac{20}{10} \right) = 63.43^\circ$$

분모:

$$(j1)^3 + 9(j1)^2 + 27(j1) + 27 = j1 + 9(-1) + j27 + 27 = j1 - 9 + j27 + 27 = 18 + j28$$

분모 크기:

$$\sqrt{18^2 + 28^2} = \sqrt{324 + 784} = \sqrt{1108} \approx 33.29$$

분모 위상:

$$\tan^{-1} \left(\frac{28}{18} \right) = 57.99^\circ$$

전체 크기:

$$\frac{22.36}{33.29} \approx 0.672$$

전체 위상:

$$63.43^\circ - 57.99^\circ = 5.44^\circ$$

해설

3차 다항식의 허수부와 실수부 계산을 정확히 해야 하며, 크기와 위상 응답 차이가 적음을 확인할 수 있습니다.

답

$$|H(j1)| \approx 0.672, \quad \angle H(j1) \approx 5.44^\circ$$

문제 4
전달 함수

$$H(s) = \frac{s^4 + 8s^3 + 24s^2 + 32s + 16}{s^4 + 10s^3 + 35s^2 + 50s + 24}$$

에 대해 $\omega = 1 \text{ rad/s}$ 에서 크기 및 위상 응답을 구하시오.

풀이

$s = j1$ 대입:

분자:

$$(j1)^4 + 8(j1)^3 + 24(j1)^2 + 32(j1) + 16 = 1 + 8(j1)^3 + 24(-1) + 32(j1) + 16$$

먼저 $(j1)^3 = j^3 = -j$, 즉 $8(j1)^3 = 8(-j) = -8j$

따라서

$$1 - 8j - 24 + 32j + 16 = (1 - 24 + 16) + (-8j + 32j) = (-7) + 24j$$

분자 크기:

$$\sqrt{(-7)^2 + 24^2} = \sqrt{49 + 576} = \sqrt{625} = 25$$

분자 위상:

$$\tan^{-1}\left(\frac{24}{-7}\right) = \tan^{-1}(-3.4286) \approx -73.74^\circ$$

실수부 음수, 허수부 양수로

$$180^\circ - 73.74^\circ = 106.26^\circ$$

분모:

$$(j1)^4 + 10(j1)^3 + 35(j1)^2 + 50(j1) + 24 = 1 + 10(-j) + 35(-1) + 50j + 24 = 1 - 10j - 35 + 50j + 24$$

합치면

$$(1 - 35 + 24) + (-10j + 50j) = (-10) + 40j$$

분모 크기:

$$\sqrt{(-10)^2 + 40^2} = \sqrt{100 + 1600} = \sqrt{1700} \approx 41.23$$

분모 위상:

$$\tan^{-1}\left(\frac{40}{-10}\right) = \tan^{-1}(-4) \approx -75.96^\circ$$

실수부 음수, 허수부 양수로

$$180^\circ - 75.96^\circ = 104.04^\circ$$

전체 크기:

$$\frac{25}{41.23} \approx 0.606$$

전체 위상:

$$106.26^\circ - 104.04^\circ = 2.22^\circ$$

해설

4차 다항식의 복소수 대입 계산에서 각 항의 차수를 꼼꼼히 계산하는 것이 중요합니다. 위상 각도 계산 시 사분면 판단을 정확히 해야합니다.

답

$$|H(j1)| \approx 0.606, \quad \angle H(j1) \approx 2.22^\circ$$

문제 5

전달 함수

$$H(s) = \frac{s^3 + 9s^2 + 27s + 27}{s^3 + 12s^2 + 48s + 64}$$

에 대해 $\omega = 2 \text{ rad/s}$ 에서 크기 및 위상 응답을 구하시오.

풀이

$s = j2$:

분자:

$$(j2)^3 + 9(j2)^2 + 27(j2) + 27 = j8 + 9(-4) + j54 + 27 = j8 - 36 + j54 + 27 = (-9) + j62$$

분자 크기:

$$\sqrt{(-9)^2 + 62^2} = \sqrt{81 + 3844} = \sqrt{3925} \approx 62.64$$

분자 위상:

$$\tan^{-1}\left(\frac{62}{-9}\right) = \tan^{-1}(-6.8889) \approx -81.69^\circ$$

실수부 음수, 허수부 양수로

$$180^\circ - 81.69^\circ = 98.31^\circ$$

분모:

$$(j2)^3 + 12(j2)^2 + 48(j2) + 64 = j8 + 12(-4) + j96 + 64 = j8 - 48 + j96 + 64 = 16 + j104$$

분모 크기:

$$\sqrt{16^2 + 104^2} = \sqrt{256 + 10816} = \sqrt{11072} \approx 105.26$$

분모 위상:

$$\tan^{-1}\left(\frac{104}{16}\right) = \tan^{-1}(6.5) \approx 81.21^\circ$$

전체 크기:

$$\frac{62.64}{105.26} \approx 0.595$$

전체 위상:

$$98.31^\circ - 81.21^\circ = 17.1^\circ$$

해설

3차 다항식 분자와 분모의 복소수 대입 후 크기와 위상 계산 과정입니다. 분자 실수부 음수, 분모 실수부 양수인 점에 주의해야 합니다.

답

$$|H(j2)| \approx 0.595, \quad \angle H(j2) \approx 17.1^\circ$$

문제 6

전달 함수

$$H(s) = \frac{s^4 + 5s^3 + 10s^2 + 10s + 5}{s^4 + 6s^3 + 15s^2 + 20s + 15}$$

에 대해 $\omega = 1 \text{ rad/s}$ 에서 크기 및 위상 응답을 구하시오.

풀이

우선 $s = j\omega = j1$ 대입부터 시작합니다. 각 항을 차례로 계산하겠습니다.

분자:

$$(j1)^4 + 5(j1)^3 + 10(j1)^2 + 10(j1) + 5$$

각 항 계산:

$$\begin{aligned} - (j1)^4 &= j^4 = 1 \text{ (복소수 단위에서 } j^4 = 1) - 5(j1)^3 = 5j^3 = 5(-j) = -5j - 10(j1)^2 = 10j^2 = 10(-1) = -10 \\ - 10(j1) &= 10j - \text{상수항 } 5 \end{aligned}$$

따라서 분자 합산:

$$1 - 5j - 10 + 10j + 5 = (1 - 10 + 5) + (-5j + 10j) = (-4) + 5j$$

분자 크기:

$$|N| = \sqrt{(-4)^2 + 5^2} = \sqrt{16 + 25} = \sqrt{41} \approx 6.403$$

분자 위상:

$$\theta_N = \tan^{-1} \left(\frac{5}{-4} \right)$$

실수부가 음수, 허수부가 양수이므로 제2사분면,

$$\theta_N = 180^\circ - \tan^{-1} \left(\frac{5}{4} \right) = 180^\circ - 51.34^\circ = 128.66^\circ$$

분모:

$$(j1)^4 + 6(j1)^3 + 15(j1)^2 + 20(j1) + 15$$

각 항 계산:

$$\begin{aligned} - (j1)^4 &= 1 - 6(j1)^3 = 6j^3 = 6(-j) = -6j - 15(j1)^2 = 15(-1) = -15 - 20(j1) = 20j - \text{상수항 } 15 \\ \text{합산:} \end{aligned}$$

$$1 - 6j - 15 + 20j + 15 = (1 - 15 + 15) + (-6j + 20j) = 1 + 14j$$

분모 크기:

$$|D| = \sqrt{1^2 + 14^2} = \sqrt{1 + 196} = \sqrt{197} \approx 14.0357$$

분모 위상:

$$\theta_D = \tan^{-1} \left(\frac{14}{1} \right) = \tan^{-1}(14) \approx 86.09^\circ$$

전체 크기:

$$|H(j1)| = \frac{|N|}{|D|} = \frac{6.403}{14.0357} \approx 0.456$$

전체 위상:

$$\angle H(j1) = \theta_N - \theta_D = 128.66^\circ - 86.09^\circ = 42.57^\circ$$

해설

4차 다항식의 각 항을 복소수 $j\omega$ 에 대입할 때는 $j^2 = -1$, $j^3 = -j$, $j^4 = 1$ 임을 꼭 기억해야 합니다. 실수부와 허수부를 각각 계산한 후 피타고라스 정리로 크기를, 역탄젠트 함수로 위상을 계산합니다. 위상 각도는 실수부와 허수부의 부호에 따라 사분면을 판단해 정확히 보정해야 합니다.

답

$$|H(j1)| \approx 0.456, \quad \angle H(j1) \approx 42.57^\circ$$

문제 7

전달 함수

$$H(s) = \frac{s^3 + 4s^2 + 6s + 4}{s^3 + 5s^2 + 8s + 4}$$

에 대해 $\omega = 2 \text{ rad/s}$ 에서 크기 및 위상 응답을 구하시오.

풀이

먼저 $s = j2$ 대입합니다.

분자:

$$(j2)^3 + 4(j2)^2 + 6(j2) + 4$$

각 항 계산:

$$- (j2)^3 = j^3 \times 2^3 = -j \times 8 = -8j - 4(j2)^2 = 4 \times (-4) = -16 - 6(j2) = 12j - \text{상수항 } 4$$

합산:

$$-8j - 16 + 12j + 4 = (-16 + 4) + (-8j + 12j) = -12 + 4j$$

분자 크기:

$$|N| = \sqrt{(-12)^2 + 4^2} = \sqrt{144 + 16} = \sqrt{160} \approx 12.649$$

분자 위상:

$$\theta_N = \tan^{-1} \left(\frac{4}{-12} \right) = \tan^{-1}(-0.3333)$$

실수부 음수, 허수부 양수이므로

$$\theta_N = 180^\circ - 18.43^\circ = 161.57^\circ$$

분모:

$$(j2)^3 + 5(j2)^2 + 8(j2) + 4$$

각 항 계산:

$$-(j2)^3 = -8j - 5(j2)^2 = 5 \times (-4) = -20 - 8(j2) = 16j - \text{상수항 } 4$$

합산:

$$-8j - 20 + 16j + 4 = (-20 + 4) + (-8j + 16j) = -16 + 8j$$

분모 크기:

$$|D| = \sqrt{(-16)^2 + 8^2} = \sqrt{256 + 64} = \sqrt{320} \approx 17.888$$

분모 위상:

$$\theta_D = \tan^{-1} \left(\frac{8}{-16} \right) = \tan^{-1}(-0.5)$$

실수부 음수, 허수부 양수이므로

$$\theta_D = 180^\circ - 26.57^\circ = 153.43^\circ$$

전체 크기:

$$|H(j2)| = \frac{12.649}{17.888} \approx 0.707$$

전체 위상:

$$\angle H(j2) = 161.57^\circ - 153.43^\circ = 8.14^\circ$$

해설

3차 다항식의 크기와 위상 계산시 부호에 주의하고 역탄젠트 함수 결과를 사분면에 맞게 변환하는 과정이 중요합니다. 허수부가 양수이고 실수부가 음수인 경우 반드시 180도에서 빼야 정확한 위상입니다.

답

$$|H(j2)| \approx 0.707, \quad \angle H(j2) \approx 8.14^\circ$$

문제 8

전달 함수

$$H(s) = \frac{2s^3 + 6s^2 + 8s + 4}{s^3 + 7s^2 + 15s + 9}$$

에 대해 $\omega = 3 \text{ rad/s}$ 에서 크기 및 위상 응답을 구하시오.

풀이

$s = j3$ 대입:

분자:

$$2(j3)^3 + 6(j3)^2 + 8(j3) + 4$$

각 항 계산:

$$-(j3)^3 = j^3 \times 3^3 = -j \times 27 = -27j, \text{ 따라서 } 2 \times -27j = -54j - 6(j3)^2 = 6 \times (-9) = -54 - 8(j3) = 24j - \text{상수항 } 4$$

합산:

$$-54j - 54 + 24j + 4 = (-54 + 4) + (-54j + 24j) = -50 - 30j$$

분자 크기:

$$|N| = \sqrt{(-50)^2 + (-30)^2} = \sqrt{2500 + 900} = \sqrt{3400} \approx 58.31$$

분자 위상:

$$\theta_N = \tan^{-1} \left(\frac{-30}{-50} \right) = \tan^{-1}(0.6)$$

실수부와 허수부가 모두 음수이므로 제3사분면입니다. 따라서

$$\theta_N = 180^\circ + 30.96^\circ = 210.96^\circ$$

분모:

$$(j3)^3 + 7(j3)^2 + 15(j3) + 9$$

각 항 계산:

$$-(j3)^3 = -27j - 7(j3)^2 = 7 \times (-9) = -63 - 15(j3) = 45j - \text{상수항 } 9$$

합산:

$$-27j - 63 + 45j + 9 = (-63 + 9) + (-27j + 45j) = -54 + 18j$$

분모 크기:

$$|D| = \sqrt{(-54)^2 + 18^2} = \sqrt{2916 + 324} = \sqrt{3240} \approx 56.92$$

분모 위상:

$$\theta_D = \tan^{-1} \left(\frac{18}{-54} \right) = \tan^{-1}(-0.3333)$$

실수부 음수, 허수부 양수는 아니지만 허수부가 양수인 경우는 아님. 여기서 허수부가 양수입니다? 아뇨, 허수부 18는 양수, 실수부 -54 음수, 즉 제2사분면으로 판단.

따라서

$$\theta_D = 180^\circ - 18.43^\circ = 161.57^\circ$$

전체 크기:

$$|H(j3)| = \frac{58.31}{56.92} \approx 1.024$$

전체 위상:

$$\angle H(j3) = 210.96^\circ - 161.57^\circ = 49.39^\circ$$

해설

복소수 계산에서 부호에 따른 사분면 판단과 위상 보정이 특히 중요합니다. 분자에서는 실수와 허수 모두 음수로 3사분면, 분모는 실수 음수, 허수 양수로 2사분면입니다. 크기가 1 이상으로 증폭 효과가 있음을 알 수 있습니다.

답

$$|H(j3)| \approx 1.024, \quad \angle H(j3) \approx 49.39^\circ$$

문제 9

전달 함수

$$H(s) = \frac{s^4 + 7s^3 + 21s^2 + 35s + 35}{s^4 + 8s^3 + 28s^2 + 56s + 70}$$

에 대해 $\omega = 1 \text{ rad/s}$ 에서 크기 및 위상 응답을 구하시오.

풀이

$s = j1$ 대입:

분자:

$$(j1)^4 + 7(j1)^3 + 21(j1)^2 + 35(j1) + 35$$

계산:

$$- (j1)^4 = 1 - 7(j1)^3 = 7 \times (-j) = -7j - 21(j1)^2 = 21 \times (-1) = -21 - 35(j1) = 35j - \text{상수항 } 35$$

합산:

$$1 - 7j - 21 + 35j + 35 = (1 - 21 + 35) + (-7j + 35j) = 15 + 28j$$

분자 크기:

$$|N| = \sqrt{15^2 + 28^2} = \sqrt{225 + 784} = \sqrt{1009} \approx 31.76$$

분자 위상:

$$\theta_N = \tan^{-1} \left(\frac{28}{15} \right) = 61.93^\circ$$

분모:

$$(j1)^4 + 8(j1)^3 + 28(j1)^2 + 56(j1) + 70$$

계산:

$$- (j1)^4 = 1 - 8(j1)^3 = 8 \times (-j) = -8j - 28(j1)^2 = 28 \times (-1) = -28 - 56(j1) = 56j - \text{상수항 } 70$$

합산:

$$1 - 8j - 28 + 56j + 70 = (1 - 28 + 70) + (-8j + 56j) = 43 + 48j$$

분모 크기:

$$|D| = \sqrt{43^2 + 48^2} = \sqrt{1849 + 2304} = \sqrt{4153} \approx 64.44$$

분모 위상:

$$\theta_D = \tan^{-1} \left(\frac{48}{43} \right) = 48.37^\circ$$

전체 크기:

$$|H(j1)| = \frac{31.76}{64.44} \approx 0.493$$

전체 위상:

$$\angle H(j1) = 61.93^\circ - 48.37^\circ = 13.56^\circ$$

해설

4차 다항식 항들을 정확히 계산한 후, 허수부와 실수부가 모두 양수이므로 위상은 그대로 적용할 수 있습니다. 크기 차이는 약 절반으로 감쇠 특성을 의미합니다.

답

$$|H(j1)| \approx 0.493, \quad \angle H(j1) \approx 13.56^\circ$$

문제 10
전달 함수

$$H(s) = \frac{3s^3 + 12s^2 + 18s + 12}{s^3 + 10s^2 + 35s + 50}$$

에 대해 $\omega = 2 \text{ rad/s}$ 에서 크기 및 위상 응답을 구하시오.

풀이
 $s = j2$ 대입:
분자:

$$3(j2)^3 + 12(j2)^2 + 18(j2) + 12$$

계산:

$$-(j2)^3 = -8j, \text{ 따라서 } 3 \times -8j = -24j - 12(j2)^2 = 12 \times (-4) = -48 - 18(j2) = 36j - \text{상수 } 12$$

합산:

$$-24j - 48 + 36j + 12 = (-48 + 12) + (-24j + 36j) = -36 + 12j$$

분자 크기:

$$|N| = \sqrt{(-36)^2 + 12^2} = \sqrt{1296 + 144} = \sqrt{1440} \approx 37.95$$

분자 위상:

$$\theta_N = \tan^{-1} \left(\frac{12}{-36} \right) = \tan^{-1}(-0.3333)$$

실수부 음수, 허수부 양수이므로

$$\theta_N = 180^\circ - 18.43^\circ = 161.57^\circ$$

분모:

$$(j2)^3 + 10(j2)^2 + 35(j2) + 50$$

계산:

$$-(j2)^3 = -8j - 10(j2)^2 = 10 \times (-4) = -40 - 35(j2) = 70j - \text{상수 } 50$$

합산:

$$-8j - 40 + 70j + 50 = (-40 + 50) + (-8j + 70j) = 10 + 62j$$

분모 크기:

$$|D| = \sqrt{10^2 + 62^2} = \sqrt{100 + 3844} = \sqrt{3944} \approx 62.79$$

분모 위상:

$$\theta_D = \tan^{-1} \left(\frac{62}{10} \right) = \tan^{-1}(6.2) \approx 80.8^\circ$$

전체 크기:

$$|H(j2)| = \frac{37.95}{62.79} \approx 0.605$$

전체 위상:

$$\angle H(j2) = 161.57^\circ - 80.8^\circ = 80.77^\circ$$

해설

분자 분모의 허수부, 실수부 부호 및 크기 계산에 유의하면서 위상 각도를 구했습니다. 위상이 크게 양의 값을 가지는 것을 확인할 수 있습니다.

답

$$|H(j2)| \approx 0.605, \quad \angle H(j2) \approx 80.77^\circ$$

문제 11

전달 함수

$$H(s) = \frac{4s^4 + 20s^3 + 50s^2 + 60s + 30}{s^4 + 12s^3 + 50s^2 + 100s + 90}$$

에 대해 $\omega = 1 \text{ rad/s}$ 에서 크기와 위상 응답을 구하시오.

풀이

$s = j1$ 대입부터 진행합니다.

분자 계산:

$$4(j1)^4 + 20(j1)^3 + 50(j1)^2 + 60(j1) + 30$$

- $(j1)^4 = 1$, 따라서 $4 \times 1 = 4$ - $20(j1)^3 = 20 \times (-j) = -20j$ - $50(j1)^2 = 50 \times (-1) = -50$ - $60(j1) = 60j$ - 상수항 30

합산:

$$4 - 20j - 50 + 60j + 30 = (4 - 50 + 30) + (-20j + 60j) = (-16) + 40j$$

분자 크기:

$$|N| = \sqrt{(-16)^2 + 40^2} = \sqrt{256 + 1600} = \sqrt{1856} \approx 43.08$$

분자 위상:

$$\theta_N = \tan^{-1} \left(\frac{40}{-16} \right)$$

실수부 음수, 허수부 양수이므로 제2사분면,

$$\theta_N = 180^\circ - \tan^{-1} \left(\frac{40}{16} \right) = 180^\circ - 68.2^\circ = 111.8^\circ$$

분모 계산:

$$(j1)^4 + 12(j1)^3 + 50(j1)^2 + 100(j1) + 90$$

- $(j1)^4 = 1$ - $12(j1)^3 = 12 \times (-j) = -12j$ - $50(j1)^2 = -50$ - $100(j1) = 100j$ - 상수항 90
합산:

$$1 - 12j - 50 + 100j + 90 = (1 - 50 + 90) + (-12j + 100j) = 41 + 88j$$

분모 크기:

$$|D| = \sqrt{41^2 + 88^2} = \sqrt{1681 + 7744} = \sqrt{9425} \approx 97.09$$

분모 위상:

$$\theta_D = \tan^{-1} \left(\frac{88}{41} \right) = 64.9^\circ$$

전체 크기:

$$|H(j1)| = \frac{43.08}{97.09} \approx 0.444$$

전체 위상:

$$\angle H(j1) = 111.8^\circ - 64.9^\circ = 46.9^\circ$$

해설

분자와 분모의 복소수 계산 과정에서 사분면에 따른 위상 보정이 매우 중요합니다. 크기 계산 시 허수부와 실수부를 각각 제공하여 더한 후 루트를 씌우는 방식입니다. 위상은 역탄젠트 함수를 이용하되, 부호와 위치에 따른 각도 조정에 유의해야 합니다.

답

$$|H(j1)| \approx 0.444, \quad \angle H(j1) \approx 46.9^\circ$$

문제 12

전달 함수

$$H(s) = \frac{s^3 + 5s^2 + 10s + 10}{s^3 + 8s^2 + 22s + 24}$$

에 대해 $\omega = 3 \text{ rad/s}$ 에서 크기와 위상 응답을 구하시오.

풀이

$s = j3$ 대입:

분자 계산:

$$(j3)^3 + 5(j3)^2 + 10(j3) + 10$$

- $(j3)^3 = j^3 \times 3^3 = -j \times 27 = -27j$ - $5(j3)^2 = 5 \times (-9) = -45$ - $10(j3) = 30j$ - 상수항 10
합산:

$$-27j - 45 + 30j + 10 = (-45 + 10) + (-27j + 30j) = -35 + 3j$$

분자 크기:

$$|N| = \sqrt{(-35)^2 + 3^2} = \sqrt{1225 + 9} = \sqrt{1234} \approx 35.12$$

분자 위상:

$$\theta_N = \tan^{-1} \left(\frac{3}{-35} \right)$$

실수부 음수, 허수부 양수(3)는 양수이나 아주 작음으로 제2사분면,

$$\theta_N = 180^\circ - \tan^{-1} \left(\frac{3}{35} \right) = 180^\circ - 4.9^\circ = 175.1^\circ$$

분모 계산:

$$(j3)^3 + 8(j3)^2 + 22(j3) + 24$$

- $(j3)^3 = -27j - 8(j3)^2 = 8 \times (-9) = -72 - 22(j3) = 66j$ - 상수항 24
 합산:

$$-27j - 72 + 66j + 24 = (-72 + 24) + (-27j + 66j) = -48 + 39j$$

분모 크기:

$$|D| = \sqrt{(-48)^2 + 39^2} = \sqrt{2304 + 1521} = \sqrt{3825} \approx 61.85$$

분모 위상:

$$\theta_D = \tan^{-1} \left(\frac{39}{-48} \right)$$

실수부 음수, 허수부 양수이므로 제2사분면,

$$\theta_D = 180^\circ - \tan^{-1} \left(\frac{39}{48} \right) = 180^\circ - 39.4^\circ = 140.6^\circ$$

전체 크기:

$$|H(j3)| = \frac{35.12}{61.85} \approx 0.568$$

전체 위상:

$$\angle H(j3) = 175.1^\circ - 140.6^\circ = 34.5^\circ$$

해설

허수부가 작아도 실수부가 음수이고 허수부가 양수인 경우 위상 계산시 180도 빼기 처리가 반드시 필요합니다.
 복소수 덧셈과 크기 계산에서 실수와 허수 부분을 각각 나누어 계산하는 방법을 숙지해야 합니다.

답

$$|H(j3)| \approx 0.568, \quad \angle H(j3) \approx 34.5^\circ$$

문제 13

전달 함수

$$H(s) = \frac{2s^3 + 7s^2 + 12s + 8}{s^3 + 9s^2 + 27s + 27}$$

에 대해 $\omega = 2 \text{ rad/s}$ 에서 크기와 위상 응답을 구하시오.

풀이

$s = j2$ 대입:

분자:

$$2(j2)^3 + 7(j2)^2 + 12(j2) + 8$$

- $(j2)^3 = -8j$, 따라서 $2 \times -8j = -16j$ - $7(j2)^2 = 7 \times (-4) = -28$ - $12(j2) = 24j$ - 상수 8
 합산:

$$-16j - 28 + 24j + 8 = (-28 + 8) + (-16j + 24j) = -20 + 8j$$

분자 크기:

$$|N| = \sqrt{(-20)^2 + 8^2} = \sqrt{400 + 64} = \sqrt{464} \approx 21.54$$

분자 위상:

$$\theta_N = \tan^{-1} \left(\frac{8}{-20} \right)$$

실수부 음수, 허수부 양수이므로 제2사분면,

$$\theta_N = 180^\circ - \tan^{-1} \left(\frac{8}{20} \right) = 180^\circ - 21.8^\circ = 158.2^\circ$$

분모:

$$(j2)^3 + 9(j2)^2 + 27(j2) + 27$$

$$- (j2)^3 = -8j - 9(j2)^2 = 9 \times (-4) = -36 - 27(j2) = 54j - \text{상수 } 27$$

합산:

$$-8j - 36 + 54j + 27 = (-36 + 27) + (-8j + 54j) = -9 + 46j$$

분모 크기:

$$|D| = \sqrt{(-9)^2 + 46^2} = \sqrt{81 + 2116} = \sqrt{2197} \approx 46.89$$

분모 위상:

$$\theta_D = \tan^{-1} \left(\frac{46}{-9} \right)$$

실수부 음수, 허수부 양수이므로 제2사분면,

$$\theta_D = 180^\circ - \tan^{-1} \left(\frac{46}{9} \right) = 180^\circ - 78.9^\circ = 101.1^\circ$$

전체 크기:

$$|H(j2)| = \frac{21.54}{46.89} \approx 0.459$$

전체 위상:

$$\angle H(j2) = 158.2^\circ - 101.1^\circ = 57.1^\circ$$

해설

복소수 계산에서 분자와 분모 모두 실수부가 음수이고 허수부가 양수인 경우, 위상은 180도에서 빼야 합니다. 크기 계산 시에는 실수와 허수 부 제곱 합의 루트를 구하면 됩니다. 위상 차이를 구할 때도 각 부호를 주의해야 합니다.

답

$$|H(j2)| \approx 0.459, \quad \angle H(j2) \approx 57.1^\circ$$

문제 14

전달 함수

$$H(s) = \frac{s^4 + 6s^3 + 15s^2 + 20s + 10}{s^4 + 10s^3 + 35s^2 + 60s + 50}$$

에 대해 $\omega = 1 \text{ rad/s}$ 에서 크기와 위상 응답을 구하시오.

풀이

$s = j1$ 대입:

분자:

$$(j1)^4 + 6(j1)^3 + 15(j1)^2 + 20(j1) + 10$$

$$- (j1)^4 = 1 - 6(j1)^3 = 6 \times (-j) = -6j - 15(j1)^2 = 15 \times (-1) = -15 - 20(j1) = 20j - \text{상수 } 10$$

합산:

$$1 - 6j - 15 + 20j + 10 = (1 - 15 + 10) + (-6j + 20j) = (-4) + 14j$$

분자 크기:

$$|N| = \sqrt{(-4)^2 + 14^2} = \sqrt{16 + 196} = \sqrt{212} \approx 14.56$$

분자 위상:

$$\theta_N = \tan^{-1} \left(\frac{14}{-4} \right)$$

실수부 음수, 허수부 양수이므로

$$\theta_N = 180^\circ - \tan^{-1} \left(\frac{14}{4} \right) = 180^\circ - 74.05^\circ = 105.95^\circ$$

분모:

$$(j1)^4 + 10(j1)^3 + 35(j1)^2 + 60(j1) + 50$$

$$- (j1)^4 = 1 - 10(j1)^3 = 10 \times (-j) = -10j - 35(j1)^2 = 35 \times (-1) = -35 - 60(j1) = 60j - \text{상수 } 50$$

합산:

$$1 - 10j - 35 + 60j + 50 = (1 - 35 + 50) + (-10j + 60j) = 16 + 50j$$

분모 크기:

$$|D| = \sqrt{16^2 + 50^2} = \sqrt{256 + 2500} = \sqrt{2756} \approx 52.5$$

분모 위상:

$$\theta_D = \tan^{-1} \left(\frac{50}{16} \right) = 72.4^\circ$$

전체 크기:

$$|H(j1)| = \frac{14.56}{52.5} \approx 0.277$$

전체 위상:

$$\angle H(j1) = 105.95^\circ - 72.4^\circ = 33.55^\circ$$

해설

크기와 위상 계산 시 분자와 분모의 복소수 부호에 주의해야 하며, 특히 위상은 사분면을 정확히 판단하여 조정해야 합니다. 분자는 2사분면, 분모는 1사분면에 위치함을 확인할 수 있습니다.

답

$$|H(j1)| \approx 0.277, \quad \angle H(j1) \approx 33.55^\circ$$

문제 15
전달 함수

$$H(s) = \frac{3s^3 + 15s^2 + 30s + 24}{s^3 + 14s^2 + 60s + 100}$$

에 대해 $\omega = 4 \text{ rad/s}$ 에서 크기와 위상 응답을 구하시오.

풀이
 $s = j4$ 대입:
분자:

$$3(j4)^3 + 15(j4)^2 + 30(j4) + 24$$

$$\begin{aligned} - (j4)^3 &= j^3 \times 64 = -j \times 64 = -64j, \text{ 따라서 } 3 \times -64j = -192j - 15(j4)^2 = 15 \times (-16) = -240 - \\ 30(j4) &= 120j - \text{상수 } 24 \\ \text{합산:} \end{aligned}$$

$$-192j - 240 + 120j + 24 = (-240 + 24) + (-192j + 120j) = -216 - 72j$$

분자 크기:

$$|N| = \sqrt{(-216)^2 + (-72)^2} = \sqrt{46656 + 5184} = \sqrt{51840} \approx 227.7$$

분자 위상:

$$\theta_N = \tan^{-1} \left(\frac{-72}{-216} \right) = \tan^{-1}(1/3)$$

실수부와 허수부 모두 음수이므로 3사분면,

$$\theta_N = 180^\circ + 18.43^\circ = 198.43^\circ$$

분모:

$$(j4)^3 + 14(j4)^2 + 60(j4) + 100$$

$$\begin{aligned} - (j4)^3 &= -64j - 14(j4)^2 = 14 \times (-16) = -224 - 60(j4) = 240j - \text{상수 } 100 \\ \text{합산:} \end{aligned}$$

$$-64j - 224 + 240j + 100 = (-224 + 100) + (-64j + 240j) = -124 + 176j$$

분모 크기:

$$|D| = \sqrt{(-124)^2 + 176^2} = \sqrt{15376 + 30976} = \sqrt{46352} \approx 215.3$$

분모 위상:

$$\theta_D = \tan^{-1} \left(\frac{176}{-124} \right)$$

실수부 음수, 허수부 양수이므로 2사분면,

$$\theta_D = 180^\circ - \tan^{-1} \left(\frac{176}{124} \right) = 180^\circ - 54.24^\circ = 125.76^\circ$$

전체 크기:

$$|H(j4)| = \frac{227.7}{215.3} \approx 1.057$$

전체 위상:

$$\angle H(j4) = 198.43^\circ - 125.76^\circ = 72.67^\circ$$

해설

크기 계산은 피타고라스 정리를 이용해 정확히 계산하고, 위상은 부호에 따른 사분면 판단과 보정이 필수입니다. 크기가 1보다 크므로 이 주파수에서 증폭 성향임을 알 수 있습니다.

답

$$|H(j4)| \approx 1.057, \quad \angle H(j4) \approx 72.67^\circ$$

문제 16

전달 함수

$$H(s) = \frac{s^4 + 10s^3 + 45s^2 + 90s + 90}{s^4 + 15s^3 + 75s^2 + 180s + 225}$$

에 대해 $\omega = 1 \text{ rad/s}$ 에서 크기와 위상 응답을 구하시오.

풀이

$s = j1$ 대입:

분자:

$$(j1)^4 + 10(j1)^3 + 45(j1)^2 + 90(j1) + 90$$

$$- (j1)^4 = 1 - 10(j1)^3 = -10j - 45(j1)^2 = -45 - 90(j1) = 90j - \text{상수 } 90$$

합산:

$$1 - 10j - 45 + 90j + 90 = (1 - 45 + 90) + (-10j + 90j) = 46 + 80j$$

분자 크기:

$$|N| = \sqrt{46^2 + 80^2} = \sqrt{2116 + 6400} = \sqrt{8516} \approx 92.3$$

분자 위상:

$$\theta_N = \tan^{-1} \left(\frac{80}{46} \right) = 60.8^\circ$$

분모:

$$(j1)^4 + 15(j1)^3 + 75(j1)^2 + 180(j1) + 225$$

$$- (j1)^4 = 1 - 15(j1)^3 = -15j - 75(j1)^2 = -75 - 180(j1) = 180j - \text{상수 } 225$$

합산:

$$1 - 15j - 75 + 180j + 225 = (1 - 75 + 225) + (-15j + 180j) = 151 + 165j$$

분모 크기:

$$|D| = \sqrt{151^2 + 165^2} = \sqrt{22801 + 27225} = \sqrt{50026} \approx 223.6$$

분모 위상:

$$\theta_D = \tan^{-1} \left(\frac{165}{151} \right) = 47.3^\circ$$

전체 크기:

$$|H(j1)| = \frac{92.3}{223.6} \approx 0.413$$

전체 위상:

$$\angle H(j1) = 60.8^\circ - 47.3^\circ = 13.5^\circ$$

해설

각 항의 크기와 위상을 정확히 계산하여 실수부와 허수부가 모두 양수이므로 위상 계산에 추가 보정은 없습니다. 크기 0.4 정도로 감쇠 특성이 있음을 알 수 있습니다.

답

$$|H(j1)| \approx 0.413, \quad \angle H(j1) \approx 13.5^\circ$$

문제 17

전달 함수

$$H(s) = \frac{5s^3 + 20s^2 + 30s + 20}{s^3 + 16s^2 + 75s + 125}$$

에 대해 $\omega = 3 \text{ rad/s}$ 에서 크기와 위상 응답을 구하시오.

풀이

$s = j3$ 대입:

분자:

$$5(j3)^3 + 20(j3)^2 + 30(j3) + 20$$

- $(j3)^3 = -27j$, $5 \times -27j = -135j$ - $20(j3)^2 = 20 \times (-9) = -180$ - $30(j3) = 90j$ - 상수 20
합산:

$$-135j - 180 + 90j + 20 = (-180 + 20) + (-135j + 90j) = -160 - 45j$$

분자 크기:

$$|N| = \sqrt{(-160)^2 + (-45)^2} = \sqrt{25600 + 2025} = \sqrt{27625} \approx 166.21$$

분자 위상:

$$\theta_N = \tan^{-1} \left(\frac{-45}{-160} \right) = \tan^{-1}(0.28125)$$

실수부 음수, 허수부 음수로 제3사분면,

$$\theta_N = 180^\circ + 15.7^\circ = 195.7^\circ$$

분모:

$$(j3)^3 + 16(j3)^2 + 75(j3) + 125$$

- $(j3)^3 = -27j$ - $16(j3)^2 = 16 \times (-9) = -144$ - $75(j3) = 225j$ - 상수 125
합산:

$$-27j - 144 + 225j + 125 = (-144 + 125) + (-27j + 225j) = -19 + 198j$$

분모 크기:

$$|D| = \sqrt{(-19)^2 + 198^2} = \sqrt{361 + 39204} = \sqrt{39565} \approx 198.9$$

분모 위상:

$$\theta_D = \tan^{-1} \left(\frac{198}{-19} \right)$$

실수부 음수, 허수부 양수로 제2사분면,

$$\theta_D = 180^\circ - \tan^{-1} \left(\frac{198}{19} \right) = 180^\circ - 84.5^\circ = 95.5^\circ$$

전체 크기:

$$|H(j3)| = \frac{166.21}{198.9} \approx 0.836$$

전체 위상:

$$\angle H(j3) = 195.7^\circ - 95.5^\circ = 100.2^\circ$$

해설

분자와 분모 모두 실수부 음수이나 분자의 허수부가 음수, 분모의 허수부는 양수임을 고려해 위상 사분면을 정확히 계산했습니다. 이 주파수에서 위상이 100도 이상으로 상당히 크게 지연됨을 알 수 있습니다.

답

$$|H(j3)| \approx 0.836, \quad \angle H(j3) \approx 100.2^\circ$$

문제 18

전달 함수

$$H(s) = \frac{4s^4 + 25s^3 + 75s^2 + 100s + 60}{s^4 + 20s^3 + 125s^2 + 300s + 250}$$

에 대해 $\omega = 2 \text{ rad/s}$ 에서 크기와 위상 응답을 구하시오.

풀이

$s = j2$ 대입:

분자:

$$4(j2)^4 + 25(j2)^3 + 75(j2)^2 + 100(j2) + 60$$

$$- (j2)^4 = 1 \times 16 = 16, \quad 4 \times 16 = 64 - 25(j2)^3 = 25 \times (-8j) = -200j - 75(j2)^2 = 75 \times (-4) = -300 - 100(j2) = 200j - \text{상수 } 60$$

합산:

$$64 - 200j - 300 + 200j + 60 = (64 - 300 + 60) + (-200j + 200j) = -176 + 0j$$

분자 크기:

$$|N| = |-176| = 176$$

분자 위상:

$$\theta_N = 0^\circ \quad (\text{허수부가 } 0)$$

분모:

$$(j2)^4 + 20(j2)^3 + 125(j2)^2 + 300(j2) + 250$$

- $(j2)^4 = 16 - 20(j2)^3 = 20 \times (-8j) = -160j - 125(j2)^2 = 125 \times (-4) = -500 - 300(j2) = 600j -$ 상수 250
합산:

$$16 - 160j - 500 + 600j + 250 = (16 - 500 + 250) + (-160j + 600j) = (-234) + 440j$$

분모 크기:

$$|D| = \sqrt{(-234)^2 + 440^2} = \sqrt{54756 + 193600} = \sqrt{248356} \approx 498.35$$

분모 위상:

$$\theta_D = \tan^{-1} \left(\frac{440}{-234} \right)$$

실수부 음수, 허수부 양수이므로 2사분면,

$$\theta_D = 180^\circ - \tan^{-1} \left(\frac{440}{234} \right) = 180^\circ - 62.4^\circ = 117.6^\circ$$

전체 크기:

$$|H(j2)| = \frac{176}{498.35} \approx 0.353$$

전체 위상:

$$\angle H(j2) = 0^\circ - 117.6^\circ = -117.6^\circ$$

해설

분자는 허수부가 0으로 실수만 있으므로 위상은 0도입니다. 분모는 실수부 음수, 허수부 양수로 2사분면 위상을 갖고 있으며 전체 위상은 분자 위상에서 분모 위상을 뺀 값입니다. 음수 위상은 신호가 지연됨을 의미합니다.

답

$$|H(j2)| \approx 0.353, \quad \angle H(j2) \approx -117.6^\circ$$

문제 19

전달 함수

$$H(s) = \frac{6s^3 + 30s^2 + 54s + 36}{s^3 + 18s^2 + 108s + 216}$$

에 대해 $\omega = 3 \text{ rad/s}$ 에서 크기와 위상 응답을 구하시오.

풀이

$s = j3$ 대입:

분자:

$$6(j3)^3 + 30(j3)^2 + 54(j3) + 36$$

- $(j3)^3 = -27j, 6 \times -27j = -162j - 30(j3)^2 = 30 \times (-9) = -270 - 54(j3) = 162j -$ 상수 36
합산:

$$-162j - 270 + 162j + 36 = (-270 + 36) + (-162j + 162j) = -234 + 0j$$

분자 크기:

$$|N| = |-234| = 234$$

분자 위상:

$$\theta_N = 0^\circ$$

분모:

$$(j3)^3 + 18(j3)^2 + 108(j3) + 216$$

$$- (j3)^3 = -27j - 18(j3)^2 = 18 \times (-9) = -162 - 108(j3) = 324j - \text{상수 } 216$$

합산:

$$-27j - 162 + 324j + 216 = (-162 + 216) + (-27j + 324j) = 54 + 297j$$

분모 크기:

$$|D| = \sqrt{54^2 + 297^2} = \sqrt{2916 + 88209} = \sqrt{91125} \approx 301.87$$

분모 위상:

$$\theta_D = \tan^{-1} \left(\frac{297}{54} \right) = 79.7^\circ$$

전체 크기:

$$|H(j3)| = \frac{234}{301.87} \approx 0.775$$

전체 위상:

$$\angle H(j3) = 0^\circ - 79.7^\circ = -79.7^\circ$$

해설

분자는 허수부가 0으로 순수 실수이므로 위상은 0도입니다. 분모는 모두 양수로 1사분면에 위치하여 위상은 양수이며, 전체 위상은 음수로 나옵니다. 즉, 신호가 약 80도 정도 지연된다는 의미입니다.

답

$$|H(j3)| \approx 0.775, \quad \angle H(j3) \approx -79.7^\circ$$

문제 20

전달 함수

$$H(s) = \frac{s^4 + 15s^3 + 90s^2 + 270s + 405}{s^4 + 20s^3 + 125s^2 + 300s + 400}$$

에 대해 $\omega = 1 \text{ rad/s}$ 에서 크기와 위상 응답을 구하시오.

풀이

$s = j1$ 대입:

분자:

$$(j1)^4 + 15(j1)^3 + 90(j1)^2 + 270(j1) + 405$$

$$- (j1)^4 = 1 - 15(j1)^3 = -15j - 90(j1)^2 = -90 - 270(j1) = 270j - \text{상수 } 405$$

합산:

$$1 - 15j - 90 + 270j + 405 = (1 - 90 + 405) + (-15j + 270j) = 316 + 255j$$

분자 크기:

$$|N| = \sqrt{316^2 + 255^2} = \sqrt{99856 + 65025} = \sqrt{164881} \approx 406$$

분자 위상:

$$\theta_N = \tan^{-1} \left(\frac{255}{316} \right) = 39.0^\circ$$

분모:

$$(j1)^4 + 20(j1)^3 + 125(j1)^2 + 300(j1) + 400$$

$$- (j1)^4 = 1 - 20(j1)^3 = -20j - 125(j1)^2 = -125 - 300(j1) = 300j - \text{상수 } 400$$

합산:

$$1 - 20j - 125 + 300j + 400 = (1 - 125 + 400) + (-20j + 300j) = 276 + 280j$$

분모 크기:

$$|D| = \sqrt{276^2 + 280^2} = \sqrt{76176 + 78400} = \sqrt{154576} \approx 393.16$$

분모 위상:

$$\theta_D = \tan^{-1} \left(\frac{280}{276} \right) = 45.4^\circ$$

전체 크기:

$$|H(j1)| = \frac{406}{393.16} \approx 1.033$$

전체 위상:

$$\angle H(j1) = 39.0^\circ - 45.4^\circ = -6.4^\circ$$

해설

분자와 분모 모두 양수 실수부, 허수부가 양수여서 모두 1사분면에 위치하며 위상은 양수입니다. 전체 위상은 분자 위상에서 분모 위상을 빼서 음수값으로 약간의 지연을 보입니다. 크기는 1보다 약간 큰 상태입니다.

답

$$|H(j1)| \approx 1.033, \quad \angle H(j1) \approx -6.4^\circ$$