

선형성과 시간불변성 초급 문제 20선

작성자

July 30, 2025

Contents

문제 1

시스템 S 가 다음과 같이 정의된다.

$$S\{x(t)\} = 3x(t)$$

이 시스템이 선형인지 판단하고 그 이유를 서술하시오.

풀이

선형성은 다음 두 가지 조건을 만족해야 한다:

- 가법성: $S\{x_1(t) + x_2(t)\} = S\{x_1(t)\} + S\{x_2(t)\}$
- 동차성: $S\{ax(t)\} = aS\{x(t)\}$, a 는 임의 상수

주어진 시스템에 대해 확인하면,

$$S\{ax_1(t) + bx_2(t)\} = 3(ax_1(t) + bx_2(t)) = 3ax_1(t) + 3bx_2(t)$$

반면에,

$$aS\{x_1(t)\} + bS\{x_2(t)\} = a(3x_1(t)) + b(3x_2(t)) = 3ax_1(t) + 3bx_2(t)$$

두 식이 같으므로 선형성을 만족한다.

답

이 시스템은 선형 시스템이다.

문제 2

시스템 S 가 다음과 같이 정의된다.

$$S\{x(t)\} = x^2(t)$$

이 시스템이 선형인지 판단하고 이유를 서술하시오.

풀이

임의의 $x_1(t), x_2(t)$, 상수 a, b 에 대해

$$S\{ax_1(t) + bx_2(t)\} = [ax_1(t) + bx_2(t)]^2$$

이고,

$$aS\{x_1(t)\} + bS\{x_2(t)\} = ax_1^2(t) + bx_2^2(t)$$

두 식이 일반적으로 같지 않으므로 선형성이 아니다.

답

이 시스템은 비선형 시스템이다.

문제 3

다음 시스템이 시간불변인지 판단하시오.

$$S\{x(t)\} = x(t - 3)$$

풀이

시간불변성 조건은 모든 τ 에 대해

$$S\{x(t - \tau)\} = y(t - \tau)$$

이어야 한다.

입력 $x(t)$ 에 대해 출력은

$$y(t) = x(t - 3)$$

입력을 지연시킨 경우

$$S\{x(t - \tau)\} = x(t - \tau - 3) = y(t - \tau)$$

따라서 시간불변성 조건을 만족한다.

답

이 시스템은 시간불변 시스템이다.

문제 4

다음 시스템이 시간불변인지 판단하시오.

$$S\{x(t)\} = t \cdot x(t)$$

풀이

입력 $x(t)$ 에 대해 출력은

$$y(t) = t \cdot x(t)$$

입력을 시간 τ 만큼 지연시키면,

$$S\{x(t - \tau)\} = t \cdot x(t - \tau)$$

반면, 출력 $y(t - \tau) = (t - \tau) \cdot x(t - \tau)$
두 값이 다르므로 시간불변성이 아니다.

답

이 시스템은 시간변화 시스템이다.

문제 5

다음 시스템 S 가 선형인지, 시간불변인지 각각 판단하시오.

$$S\{x(t)\} = \frac{d}{dt}x(t)$$

풀이

선형성 미분 연산은 선형 연산자이다. 즉,

$$\frac{d}{dt}[ax_1(t) + bx_2(t)] = a\frac{d}{dt}x_1(t) + b\frac{d}{dt}x_2(t)$$

따라서 선형성 만족.

시간불변성 입력 지연 시,

$$S\{x(t - \tau)\} = \frac{d}{dt}x(t - \tau) = \frac{d}{dt}x(t - \tau)$$

출력 지연은

$$y(t - \tau) = \frac{d}{dt}x(t) \Big|_{t \rightarrow t - \tau} = \frac{d}{d(t - \tau)}x(t - \tau)$$

시간미분은 변수 치환에 영향받지 않으므로 시간불변성 만족.

답

이 시스템은 선형이며 시간불변 시스템이다.

문제 6

시스템 S 가 다음과 같이 정의된다.

$$S\{x(t)\} = \int_0^t x(\tau) d\tau$$

선형성과 시간불변성을 판단하시오.

풀이

선형성 적분 연산은 선형이다.

$$S\{ax_1(t) + bx_2(t)\} = \int_0^t [ax_1(\tau) + bx_2(\tau)] d\tau = a \int_0^t x_1(\tau) d\tau + b \int_0^t x_2(\tau) d\tau$$

시간불변성 입력 지연 시,

$$S\{x(t - \tau)\} = \int_0^t x(\sigma - \tau) d\sigma$$

출력 지연은

$$y(t - \tau) = \int_0^{t-\tau} x(\sigma) d\sigma$$

두 값이 다르므로 시간불변성이 아니다.

답

선형이지만 시간변화 시스템이다.

문제 7

다음 시스템은 시간불변인가?

$$S\{x(t)\} = x(-t)$$

풀이

입력을 지연시키면,

$$S\{x(t - \tau)\} = x(-(t - \tau)) = x(-t + \tau)$$

출력 지연은

$$y(t - \tau) = x(-(t - \tau)) = x(-t + \tau)$$

두 값이 같다.

그러나 t 가 $-t$ 로 바뀌므로 원래 시간에 따라 움직이지 않으므로 시간불변이 아니다.

더 엄밀히 말하면, 시간 반전이 포함되어 있으므로 시간불변성 위배.

답

시간불변성이 아니다.

문제 8

다음 시스템이 선형인지 판단하시오.

$$S\{x(t)\} = x(t) + 5$$

풀이

임의의 a, b 와 $x_1(t), x_2(t)$ 에 대해,

$$S\{ax_1(t) + bx_2(t)\} = ax_1(t) + bx_2(t) + 5$$

반면에,

$$aS\{x_1(t)\} + bS\{x_2(t)\} = a(x_1(t) + 5) + b(x_2(t) + 5) = ax_1(t) + bx_2(t) + 5(a + b)$$

두 식이 같지 않으므로 선형성이 아니다.

답

비선형 시스템이다.

문제 9

다음 시스템 S 가 시간불변인지 판단하시오.

$$S\{x(t)\} = e^t x(t)$$

풀이

입력 지연 시,

$$S\{x(t - \tau)\} = e^t x(t - \tau)$$

출력 지연은,

$$y(t - \tau) = e^{t-\tau} x(t - \tau)$$

두 값이 다르므로 시간불변성이 아니다.

답

시간변화 시스템이다.

문제 10

시스템 S 가 다음과 같이 정의된다.

$$S\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t - \tau - 2)d\tau$$

이 시스템이 시간불변인지 판단하시오.

풀이

$$S\{x(t)\} = x(t - 2)$$

입력 지연시,

$$S\{x(t - \tau)\} = x(t - \tau - 2)$$

출력 지연은

$$y(t - \tau) = x(t - \tau - 2)$$

같으므로 시간불변이다.

답

시간불변 시스템이다.

문제 11

다음 시스템이 선형인지 판단하시오.

$$S\{x(t)\} = \int_{-\infty}^t e^{-(t-\tau)} x(\tau) d\tau$$

풀이

적분과 지수함수 곱은 선형 연산이다.

$$S\{ax_1(t) + bx_2(t)\} = aS\{x_1(t)\} + bS\{x_2(t)\}$$

따라서 선형이다.

답

선형 시스템이다.

문제 12

시스템 S 가 다음과 같이 정의된다.

$$S\{x(t)\} = \cos(t) \cdot x(t)$$

시간불변성을 판단하시오.

풀이

입력 지연 시,

$$S\{x(t - \tau)\} = \cos(t) \cdot x(t - \tau)$$

출력 지연은,

$$y(t - \tau) = \cos(t - \tau) \cdot x(t - \tau)$$

두 값이 다르므로 시간불변성이 아니다.

답

시간변화 시스템이다.

문제 13

다음 시스템이 선형인지 판단하시오.

$$S\{x(t)\} = \frac{d^2}{dt^2}x(t)$$

풀이

2차 미분 연산자는 선형 연산자이다.

$$\frac{d^2}{dt^2}[ax_1(t) + bx_2(t)] = a\frac{d^2}{dt^2}x_1(t) + b\frac{d^2}{dt^2}x_2(t)$$

따라서 선형이다.

답

선형 시스템이다.

문제 14

시스템 S 가 다음과 같이 정의된다.

$$S\{x(t)\} = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau + 5$$

선형성과 시간불변성을 판단하시오.

풀이

선형성 상수 5가 더해지므로 동차성 조건 위배 $\rightarrow$ 비선형

$$S\{ax(t)\} = a \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau + 5 \neq aS\{x(t)\}$$

시간불변성 상수 5는 시간에 무관하므로 적분 부분은 시간불변이다.

답

비선형, 시간불변 시스템이다.

문제 15

다음 시스템 S 가 시간불변인지 판단하시오.

$$S\{x(t)\} = x(t^2)$$

풀이

입력 지연 시,

$$S\{x(t - \tau)\} = x((t - \tau)^2)$$

출력 지연은

$$y(t - \tau) = x((t - \tau)^2)$$

두 값이 같으나, t^2 형태가 시간 이동에 선형적이지 않으므로 시간불변성 위배.

답

시간불변성이 아니다.

문제 16

다음 시스템이 선형인지 판단하시오.

$$S\{x(t)\} = \int_0^1 x(t - \tau) d\tau$$

풀이

적분은 선형 연산이다. 임의의 a, b, x_1, x_2 에 대해,

$$S\{ax_1 + bx_2\} = aS\{x_1\} + bS\{x_2\}$$

따라서 선형이다.

답

선형 시스템이다.

문제 17

다음 시스템이 시간불변인지 판단하시오.

$$S\{x(t)\} = \int_0^t e^{-(t-\tau)} x(\tau) d\tau$$

풀이

커널이 $t - \tau$ 함수로 의존하므로 시간불변성 만족.
입력 지연시에도 커널 변하지 않음.

답

시간불변 시스템이다.

문제 18

다음 시스템이 선형인지 판단하시오.

$$S\{x(t)\} = \sin(x(t))$$

풀이

사인 함수는 비선형 함수이다. 따라서 선형성이 성립하지 않는다.

답

비선형 시스템이다.

문제 19

다음 시스템이 시간불변인지 판단하시오.

$$S\{x(t)\} = x(t) + t$$

풀이

입력 지연 시,

$$S\{x(t - \tau)\} = x(t - \tau) + t$$

출력 지연은

$$y(t - \tau) = x(t - \tau) + t - \tau$$

두 값이 다르므로 시간불변성 위배.

답

시간변화 시스템이다.

문제 20

다음 시스템이 선형이고 시간불변인지 판단하시오.

$$S\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t - \tau)d\tau$$

단, $h(t)$ 는 임펄스 응답 함수이다.

풀이

이 시스템은 컨볼루션 연산으로 정의되어 있으며, 컨볼루션은 선형 및 시간불변성을 가진다.

답

선형 및 시간불변 시스템이다.