

선형성과 시간불변성 중급 문제 20선

작성자

July 30, 2025

Contents

문제 1

다음 시스템 S 에 대해,

$$S\{x(t)\} = \int_{-\infty}^t e^{-(t-\tau)} x(\tau) d\tau + \sin(t)$$

이 시스템이 선형성과 시간불변성을 각각 만족하는지 판단하고 이유를 서술하시오.

풀이

시스템 출력은 두 항의 합으로 구성된다. 첫 항 $\int_{-\infty}^t e^{-(t-\tau)} x(\tau) d\tau$ 는 선형 및 시간불변 시스템에 해당하는 컨볼루션 연산이다. 하지만 두 번째 항 $\sin(t)$ 는 입력과 무관한 함수이며, 입력에 상수항을 더하는 것과 같다.

- **선형성**: 선형성의 동차성 조건 위배. 임의 상수 a 와 입력 $x(t)$ 에 대해,

$$S\{ax(t)\} = a \int_{-\infty}^t e^{-(t-\tau)} x(\tau) d\tau + \sin(t) \neq aS\{x(t)\}$$

따라서 선형성이 아니다.

- **시간불변성**: 입력 지연에 따른 출력 지연 여부를 살펴보면, $\sin(t)$ 항은 시간에 직접 의존하므로 출력에 항상 동일하게 추가된다. 입력이 지연되더라도 $\sin(t)$ 는 변하지 않아 시간불변성 조건 위배.

답

비선형이며, 시간변화 시스템이다.

문제 2

시스템 S 가 다음과 같이 정의된다.

$$S\{x(t)\} = \frac{d}{dt} [e^{2t} x(t)]$$

이 시스템이 선형인지, 시간불변인지 각각 판단하시오.

풀이

- **선형성** 미분과 곱셈이 포함되어 있지만, 입력에 대한 연산이 선형인지 확인해야 한다.

$$S\{ax_1(t) + bx_2(t)\} = \frac{d}{dt} [e^{2t}(ax_1(t) + bx_2(t))] = a \frac{d}{dt} [e^{2t}x_1(t)] + b \frac{d}{dt} [e^{2t}x_2(t)]$$

따라서 선형이다.

- **시간불변성** 시간불변성 조건:

$$S\{x(t - \tau)\} \stackrel{?}{=} y(t - \tau)$$

입력 $x(t - \tau)$ 에 대한 출력은

$$\frac{d}{dt} [e^{2t} x(t - \tau)]$$

출력 지연은

$$y(t - \tau) = \frac{d}{d(t - \tau)} [e^{2(t-\tau)} x(t - \tau)]$$

e^{2t} 항이 t 에 직접 의존하므로, 시간지연 시 출력 형태가 달라진다. 따라서 시간불변성이 아니다.

답

선형이지만 시간변화 시스템이다.

문제 3

다음 시스템이 선형인지 판단하시오.

$$S\{x(t)\} = \int_0^1 t \cdot x(t - \tau) d\tau$$

풀이

적분 내에 t 가 직접 포함되어 있다. 선형성은 입력의 선형 결합에 대해 출력도 동일한 선형 결합인지 확인한다.

$$S\{ax_1(t) + bx_2(t)\} = \int_0^1 t[ax_1(t - \tau) + bx_2(t - \tau)]d\tau = a \int_0^1 tx_1(t - \tau)d\tau + b \int_0^1 tx_2(t - \tau)d\tau$$

따라서 선형성은 만족한다.

답

선형 시스템이다.

문제 4

다음 시스템이 시간불변인지 판단하시오.

$$S\{x(t)\} = \int_0^1 t \cdot x(t - \tau) d\tau$$

풀이

시간불변성 조건은

$$S\{x(t - \alpha)\} = y(t - \alpha)$$

입력 지연 시,

$$S\{x(t - \alpha)\} = \int_0^1 t \cdot x(t - \alpha - \tau) d\tau$$

출력 지연은

$$y(t - \alpha) = \int_0^1 (t - \alpha) \cdot x(t - \alpha - \tau) d\tau$$

두 결과가 다르므로 시간불변성이 아니다.

답

시간변화 시스템이다.

문제 5

다음 시스템 S 는 다음과 같이 정의된다.

$$S\{x(t)\} = x(t) \cdot x(t - 1)$$

선형성과 시간불변성을 판단하시오.

풀이

- 선형성 곱셈 연산이 포함되어 있어 선형성이 성립하지 않는다.

$$S\{ax_1(t) + bx_2(t)\} \neq aS\{x_1(t)\} + bS\{x_2(t)\}$$

- 시간불변성 입력 지연 시,

$$S\{x(t - \tau)\} = x(t - \tau) \cdot x(t - \tau - 1)$$

출력 지연은

$$y(t - \tau) = x(t - \tau) \cdot x(t - \tau - 1)$$

시간 지연에 대해 동일한 출력이므로 시간불변성은 만족한다.

답

비선형, 시간불변 시스템이다.

문제 6

다음 시스템이 선형인지 판단하고, 시간불변성 여부를 평가하시오.

$$S\{x(t)\} = \frac{d}{dt} \int_0^t e^{-\tau} x(t - \tau) d\tau$$

풀이

- 선형성 적분 및 미분 연산이 모두 선형이므로 전체 시스템 선형이다.
- 시간불변성 컨볼루션 형태

$$y(t) = \frac{d}{dt} [h(t) * x(t)] \quad \text{where } h(t) = e^{-t} u(t)$$

컨볼루션과 미분은 시간불변 시스템의 특징이므로 시간불변이다.

답

선형이며 시간불변 시스템이다.

문제 7

시스템 S 가 다음과 같이 정의된다.

$$S\{x(t)\} = x(t) + 3x(-t)$$

선형성과 시간불변성을 판단하시오.

풀이

- 선형성 덧셈과 곱셈은 선형 연산자이므로 선형이다.
- 시간불변성 $x(-t)$ 항 때문에 입력 신호가 시간 반전되어 출력에 반영된다. 시간 지연 시

$$S\{x(t - \tau)\} = x(t - \tau) + 3x(-t + \tau)$$

반면,

$$y(t - \tau) = x(t - \tau) + 3x(-(t - \tau)) = x(t - \tau) + 3x(-t + \tau)$$

출력 지연과 동일하므로 시간불변성은 만족한다.

답

선형이며 시간불변 시스템이다.

문제 8

다음 시스템이 시간불변인지 판단하시오.

$$S\{x(t)\} = t \cdot \frac{d}{dt}x(t)$$

풀이

시간 지연 시,

$$S\{x(t - \tau)\} = t \cdot \frac{d}{dt}x(t - \tau)$$

출력 지연은

$$y(t - \tau) = (t - \tau) \cdot \frac{d}{d(t - \tau)}x(t - \tau)$$

두 값이 다르므로 시간불변성이 아니다.

답

시간변화 시스템이다.

문제 9

다음 시스템이 선형인지 판단하시오.

$$S\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} h(t, \tau)x(\tau)d\tau$$

단, $h(t, \tau) = e^{-(t-\tau)}u(t - \tau)$.

풀이

- 선형성 적분과 곱셈 연산이므로 선형이다.

- 시간불변성 커널 함수가 t 와 τ 모두에 직접 의존한다. 시간불변성은 $h(t, \tau) = h(t - \tau)$ 형태여야 하는데, 위 식은 만족하지 않는다.

따라서 시간불변성이 아니다.

답

선형이지만 시간변화 시스템이다.

문제 10

다음 시스템에 대해,

$$S\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} h(t - \tau)x(\tau)d\tau + \alpha$$

α 는 상수. 선형성과 시간불변성 여부를 판단하시오.

풀이

- 선형성 상수 α 가 출력에 더해지므로 동차성이 깨진다. 따라서 비선형이다.
- 시간불변성 컨볼루션 연산은 시간불변이나 상수항이 추가되어 시간불변성은 유지된다.

답

비선형, 시간불변 시스템이다.

문제 11

다음 시스템 S 는 다음과 같이 정의된다.

$$S\{x(t)\} = x(t) \cdot \int_0^t x(\tau)d\tau$$

선형성과 시간불변성을 판단하시오.

풀이

- 선형성 곱셈 연산이 포함되어 있어 비선형이다.
- 시간불변성 시간 지연 시, 출력 형태가 달라지므로 시간불변성도 만족하지 않는다.

답

비선형, 시간변화 시스템이다.

문제 12

다음 시스템이 선형인지 판단하시오.

$$S\{x(t)\} = \frac{d}{dt} \left(\int_0^t x(\tau)d\tau \right)$$

풀이

적분과 미분 연산이 서로 상쇄되어

$$S\{x(t)\} = x(t)$$

가 된다.

선형이며, 입력 신호가 그대로 출력으로 나타나므로 시간불변성도 만족한다.

답

선형 및 시간불변 시스템이다.

문제 13

다음 시스템이 시간불변인지 판단하시오.

$$S\{x(t)\} = \int_{t-1}^t x(\tau) d\tau$$

풀이

입력 지연 시,

$$S\{x(t-\alpha)\} = \int_{t-1}^t x(\tau-\alpha) d\tau = \int_{t-1-\alpha}^{t-\alpha} x(s) ds$$

출력 지연은

$$y(t-\alpha) = \int_{t-\alpha-1}^{t-\alpha} x(s) ds$$

두 결과가 같으므로 시간불변성 만족한다.

답

시간불변 시스템이다.

문제 14

다음 시스템에 대해 선형성과 시간불변성을 판단하시오.

$$S\{x(t)\} = x^3(t)$$

풀이

- 선형성 비선형 함수이므로 선형성 위배.
- 시간불변성 입력 지연 시,

$$S\{x(t - \tau)\} = [x(t - \tau)]^3$$

출력 지연도

$$y(t - \tau) = [x(t - \tau)]^3$$

시간불변성은 만족한다.

답

비선형, 시간불변 시스템이다.

문제 15

다음 시스템이 선형인지 판단하시오.

$$S\{x(t)\} = x(t) + 2\frac{d}{dt}x(t)$$

풀이

덧셈과 미분 연산이 모두 선형이므로 선형이다.

답

선형 시스템이다.

문제 16

시스템 S 에 대해,

$$S\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} h(t - \tau)x(\tau)d\tau$$

여기서 $h(t) = u(t) - u(t - 1)$ (단위 계단 함수). 이 시스템의 시간불변성을 설명하시오.

풀이

$h(t)$ 가 t 에만 의존하고 $t - \tau$ 꼴로 되어 있으므로 시간불변성 만족한다.

답

시간불변 시스템이다.

문제 17

다음 시스템이 시간불변인지 판단하시오.

$$S\{x(t)\} = t \cdot \int_0^t x(\tau) d\tau$$

풀이

시간 지연 시, 출력 지연과 다르므로 시간불변성이 아니다.

답

시간변화 시스템이다.

문제 18

다음 시스템이 선형인지 판단하시오.

$$S\{x(t)\} = \int_{-\infty}^t e^{-(t-\tau)} x(\tau) d\tau$$

풀이

적분 및 곱셈 연산으로 선형성을 만족한다.

답

선형 시스템이다.

문제 19

다음 시스템이 선형인지 판단하시오.

$$S\{x(t)\} = |x(t)|$$

풀이

절댓값 연산은 비선형이다.

답

비선형 시스템이다.

문제 20

다음 시스템에 대해,

$$S\{x(t)\} = \frac{d}{dt}(tx(t))$$

선형성과 시간불변성을 판단하시오.

풀이

- 선형성 미분과 곱셈 연산을 전개하면

$$S\{x(t)\} = x(t) + t \frac{d}{dt}x(t)$$

입력에 대한 선형성을 확인하면 선형성이 만족된다.

- 시간불변성 시간에 직접 의존하는 t 때문에 시간불변성이 아니다.

답

선형, 시간변화 시스템이다.