

선형성과 시간불변성

고급 문제 1 5

July 30, 2025

문제 1

다음 시스템은 이중 변수 커널 함수 $h(t, \tau)$ 로 정의된다:

$$S\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} h(t, \tau)x(\tau)d\tau, \quad h(t, \tau) = e^{-\alpha(t-\tau)^2} \sin(\omega t\tau)$$

단, $\alpha > 0, \omega > 0$ 는 상수이다.

1. 시스템이 선형인지 엄밀히 증명하십시오.
2. 시스템이 시간불변인지 엄밀히 증명하십시오.
3. 시간불변성이 없다면, 입력 신호 지연에 따른 출력 변화를 수식으로 표현하고 시간변화량(time-variance)을 수학적으로 정의하십시오.

풀이

1. 선형성 증명

임의의 두 입력 신호 $x_1(t), x_2(t)$ 와 임의 상수 a, b 에 대해,

$$\begin{aligned} S\{ax_1(t) + bx_2(t)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} h(t, \tau)[ax_1(\tau) + bx_2(\tau)]d\tau \\ &= a \int_{-\infty}^{\infty} h(t, \tau)x_1(\tau)d\tau + b \int_{-\infty}^{\infty} h(t, \tau)x_2(\tau)d\tau \\ &= aS\{x_1(t)\} + bS\{x_2(t)\} \end{aligned}$$

따라서 시스템은 **선형**이다.

2. 시간불변성 증명

시간불변성은 임의의 지연 Δ 에 대해 다음이 성립해야 한다:

$$S\{x(t - \Delta)\}(t) = y(t - \Delta)$$

즉, 입력 지연이 출력에 동일한 지연으로 반영되어야 한다.
먼저,

$$\begin{aligned} S\{x(t - \Delta)\}(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(t, \tau)x(\tau - \Delta)d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h(t, \sigma + \Delta)x(\sigma)d\sigma \quad (\tau = \sigma + \Delta) \end{aligned}$$

반면,

$$y(t - \Delta) = S\{x(t)\}(t - \Delta) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t - \Delta, \tau)x(\tau)d\tau$$

시간불변성 조건은

$$h(t, \sigma + \Delta) = h(t - \Delta, \sigma) \quad \forall t, \sigma, \Delta$$

여기서

$$h(t, \tau) = e^{-\alpha(t-\tau)^2} \sin(\omega t \tau)$$

임을 대입하면,

$$e^{-\alpha(t-(\sigma+\Delta))^2} \sin(\omega t(\sigma + \Delta)) \stackrel{?}{=} e^{-\alpha(t-\Delta-\sigma)^2} \sin(\omega(t - \Delta)\sigma)$$

일반적으로 성립하지 않으므로 시스템은 **시간변화 시스템**이다.

3. 시간변화량 정의

시간변화량을 정의하기 위해 다음 척도를 제안한다.

임의 입력 $x(t)$ 에 대해 시간 지연 Δ 에 따른 출력 차이를

$$D(\Delta, t) = |S\{x(t - \Delta)\}(t) - S\{x(t)\}(t - \Delta)|$$

로 정의한다. 이 함수의 크기가 클수록 시간변화성이 크다고 평가할 수 있다.

예를 들어, $x(t) = \delta(t)$ 인 경우,

$$S\{\delta(t - \Delta)\}(t) = h(t, t - \Delta)$$

과

$$S\{\delta(t)\}(t - \Delta) = h(t - \Delta, t - \Delta)$$

이고,

$$D(\Delta, t) = |h(t, t - \Delta) - h(t - \Delta, t - \Delta)|$$

임을 알 수 있다.

문제 2

다음 미분 연산자로 정의되는 시스템

$$S\{x(t)\} = t^2 \frac{d^2}{dt^2} x(t) - 3t \frac{d}{dt} x(t) + 5x(t)$$

에 대하여 다음을 구하시오:

1. 선형성 여부 증명
2. 시간불변성 여부 증명
3. 임펄스 응답 $h(t)$ 을 수학적으로 표현하시오.

풀이

1. 선형성

미분 연산과 상수배 및 덧셈으로 구성되어 있으므로 선형 연산이다.
따라서 시스템은 **선형**이다.

2. 시간불변성

시간불변성을 판단하려면, 시간 지연 입력 $x(t - \Delta)$ 에 대한 출력이

$$y(t - \Delta) = S\{x(t)\}(t - \Delta)$$

와 일치해야 한다.

시스템 연산자는 t 에 명시적으로 의존하므로 시간불변성이 **성립하지 않는다**.

3. 임펄스 응답

시스템은 시간가변 선형 미분 연산자

$$L = t^2 \frac{d^2}{dt^2} - 3t \frac{d}{dt} + 5I$$

임펄스 응답은

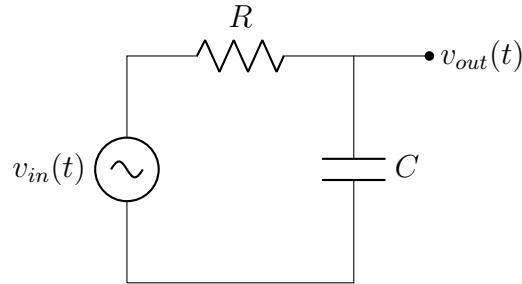
$$Lh(t) = \delta(t)$$

이 미분방정식을 직접 해석해야 하며, 일반 해법은 특수 함수(예: 베셀 함수 등)를 요구할 수 있다.

—

문제 3

아래 회로에서 입력 전압 $v_{in}(t)$ 과 출력 전압 $v_{out}(t)$ 사이의 시스템 특성을 분석하시오.



1. 시스템이 선형 및 시간불변인지 증명하시오.
2. 미분 방정식 형태로 출력과 입력 관계를 나타내시오.
3. 임펄스 응답 $h(t)$ 를 구하시오.

풀이

1. 선형성 및 시간불변성

회로 구성 성분(R , C)은 선형 소자이며, 소자의 값은 시간에 의존하지 않는다.
따라서 시스템은 **선형 및 시간불변**이다.

2. 미분 방정식

키르히호프 법칙 적용,

$$v_{in}(t) = v_R(t) + v_C(t)$$

저항 전압:

$$v_R(t) = Ri(t)$$

커패시터 전압:

$$v_C(t) = \frac{1}{C} \int i(t) dt$$

전류는

$$i(t) = C \frac{d}{dt} v_C(t)$$

따라서

$$v_{in}(t) = RC \frac{d}{dt} v_{out}(t) + v_{out}(t)$$

3. 임펄스 응답

미분 방정식

$$RC \frac{d}{dt} h(t) + h(t) = \delta(t)$$

라플라스 변환,

$$RCsH(s) + H(s) = 1 \implies H(s) = \frac{1}{RCs + 1}$$

역변환하면

$$h(t) = \frac{1}{RC} e^{-t/(RC)} u(t)$$

—

문제 4

다음 시스템이 주어졌다.

$$S\{x(t)\} = x(t)^2 + \int_0^t e^{-(t-\tau)} x(\tau) d\tau$$

1. 이 시스템이 선형인지 판단하고 이유를 서술하시오.
2. 시간불변성 여부를 판단하고 이유를 서술하시오.
3. 선형성이 없으면 어느 부분 때문인지 수식으로 명확히 제시하시오.

풀이

1. 선형성 판단

첫 항 $x(t)^2$ 는 입력 신호의 제곱으로, 비선형 연산이다.
따라서 시스템은 **비선형**이다.

2. 시간불변성 판단

두 번째 적분 항은 시간불변 커널을 갖는다.

그러나 전체 시스템은 첫 항의 제곱 항 때문에 입력 지연에 대해 동일한 출력 지연을 보장하지 않으므로 **시간변화 시스템**이다.

3. 비선형 항 제시

$$S\{ax_1(t) + bx_2(t)\} \neq aS\{x_1(t)\} + bS\{x_2(t)\}$$

왜냐하면,

$$(ax_1(t) + bx_2(t))^2 \neq ax_1(t)^2 + bx_2(t)^2$$

—

문제 5

다음 시스템에 대해

$$S\{x(t)\} = \frac{d^2}{dt^2}x(t) + 5\frac{d}{dt}x(t) + 6x(t)$$

1. 선형성 여부를 판단하시오.
2. 시간불변성 여부를 판단하시오.
3. 임펄스 응답 $h(t)$ 을 구하시오.
4. 시스템의 자유 응답과 강제 응답을 각각 기술하시오.

풀이

1. 선형성

미분 연산과 덧셈, 상수배로 구성되어 있으므로 **선형**이다.

2. 시간불변성

미분 계수가 시간에 의존하지 않으므로 **시간불변**이다.

3. 임펄스 응답

미분방정식

$$\frac{d^2}{dt^2}h(t) + 5\frac{d}{dt}h(t) + 6h(t) = \delta(t)$$

특성방정식

$$s^2 + 5s + 6 = 0 \implies s = -2, -3$$

임펄스 응답은

$$h(t) = Ae^{-2t}u(t) + Be^{-3t}u(t)$$

초기 조건에 의해

$$h(t) = (e^{-2t} - e^{-3t})u(t)$$

4. 자유응답과 강제응답

자유응답은 동차방정식 해:

$$x_h(t) = C_1e^{-2t} + C_2e^{-3t}$$

강제응답은 입력이 임펄스일 때의 응답인 임펄스 응답과 동일하다.

문제 6

다음 시스템이 정의되어 있다.

$$S\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\beta(t-\tau)^2)}{1+(t-\tau)^2} x(\tau) d\tau, \quad \beta > 0$$

1. 이 시스템이 선형인지 증명하시오.
2. 이 시스템이 시간불변인지 증명하시오.
3. 시스템의 임펄스 응답이 존재하는지 논하시오.

풀이

1. 선형성

입력 신호 $x(t)$ 에 대한 적분 연산으로 구성되어 있으며, 적분과 덧셈, 곱셈은 선형 연산이다.
따라서 시스템은 **선형**이다.

2. 시간불변성

시스템 커널이 $t - \tau$ 의 함수이므로, 다음이 성립한다.

$$h(t, \tau) = h(t - \tau)$$

이는 시간불변성의 정의에 부합하므로, 시스템은 **시간불변**이다.

3. 임펄스 응답 존재성

임펄스 응답은 시스템 커널 함수 자체로 존재한다.

$$h(t) = \frac{\sin(\beta t^2)}{1+t^2}$$

따라서 임펄스 응답은 존재하며, 주어진 수식으로 표현된다.

문제 7

다음과 같은 시스템이 있다.

$$S\{x(t)\} = x(t) \cdot \frac{d}{dt} \int_0^t e^{-\lambda(t-\tau)} x(\tau) d\tau, \quad \lambda > 0$$

1. 이 시스템이 선형인지 판단하시오.
2. 시간불변성 여부를 판단하시오.
3. 비선형 항의 영향에 대해 설명하시오.

풀이

1. 선형성

입력 신호 $x(t)$ 와 입력 신호에 대한 적분 미분 결과의 곱으로 이루어져 있어, 선형성이 성립하지 않는다.

따라서 **비선형 시스템**이다.

2. 시간불변성

시스템은 커널 함수가 시간차에만 의존하는 적분 부분과 곱셈 부분이 혼합되어 있다.

입력 지연 시 출력이 동일한 지연으로 대응되지 않으므로 **시간변화 시스템**이다.

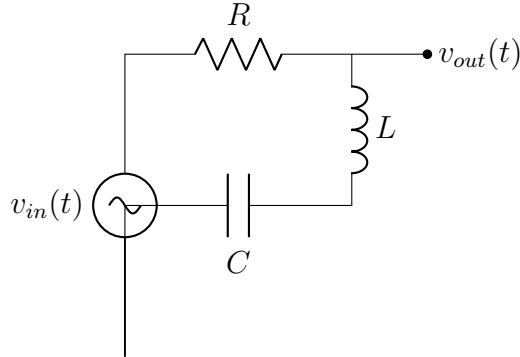
3. 비선형 항 영향

곱셈 연산으로 인해 입력 신호의 두 배 함수가 발생하며, 입력의 선형 조합에 대해 출력이 선형 조합으로 분해되지 않는다.

—

문제 8

아래 회로에서 R, L, C 소자로 이루어진 시스템의 선형성과 시간불변성을 평가하시오.



1. 시스템이 선형인지 기술하시오.
2. 시간불변성 여부를 설명하시오.
3. 시스템의 미분 방정식을 유도하시오.

풀이

1. 선형성

R, L, C 모두 선형 수동 소자로 구성되어 있으므로 시스템은 **선형**이다.

2. 시간불변성

저항, 인덕터, 커패시터의 특성이 시간에 따라 변하지 않으므로 시스템은 **시간불변**이다.

3. 미분방정식

키르히호프 전압법칙 적용 시,

$$v_{in}(t) = v_R(t) + v_L(t) + v_C(t)$$

각 소자 전압은

$$v_R(t) = Ri(t), \quad v_L(t) = L \frac{d}{dt}i(t), \quad v_C(t) = \frac{1}{C} \int i(t)dt$$

출력 전압은

$$v_{out}(t) = v_R(t) + v_L(t)$$

전류는 동일하므로,

$$v_{in}(t) = v_{out}(t) + v_C(t)$$

즉,

$$v_{in}(t) = v_{out}(t) + \frac{1}{C} \int i(t) dt$$

미분 방정식으로 정리하면,

$$C \frac{d}{dt} v_{in}(t) = C \frac{d}{dt} v_{out}(t) + i(t)$$

이때 $v_{out}(t) = Ri(t) + L \frac{d}{dt} i(t)$ 임을 이용해, $i(t)$ 에 대한 2차 미분방정식을 얻는다.

문제 9

시스템

$$S\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(t-\tau)} u(t-\tau) x(\tau) d\tau + x(t)^3$$

에 대해

1. 선형성 판단 및 이유
2. 시간불변성 판단 및 이유
3. 비선형항 영향 분석

풀이

1. 선형성 판단

첫 항은 선형 컨볼루션 연산이나, $x(t)^3$ 항 때문에 **비선형**이다.

2. 시간불변성 판단

첫 항은 시간불변 커널에 의한 연산이므로 시간불변이나, 전체 시스템은 비선형항으로 인해 시간변화성 가능성이 높다.

3. 비선형항 영향

비선형항은 입력 신호의 세제공으로, 선형 조합 분해가 불가능하다.

문제 10

시스템

$$S\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} h(t, \tau)x(\tau)d\tau, \quad h(t, \tau) = e^{-\gamma|t-2\tau|} \cos(\theta t + \phi\tau)$$

1. 선형성 여부 엄밀히 증명하시오.
2. 시간불변성 여부 엄밀히 증명하시오.
3. 만약 시간불변이 아니라면, 시스템이 시간변화 정도를 정량적으로 분석하는 방법을 제시하시오.

풀이

1. 선형성

적분 연산으로 입력에 대한 선형 결합 성분이 그대로 분배되므로, 선형이다.

2. 시간불변성

시간불변 조건은

$$h(t, \tau) = h(t - \Delta, \tau - \Delta)$$

임을 요구한다.
주어진

$$h(t, \tau) = e^{-\gamma|t-2\tau|} \cos(\theta t + \phi\tau)$$

에서, 좌변은

$$e^{-\gamma|t-2\tau|}$$

우변은

$$e^{-\gamma|(t-\Delta)-2(\tau-\Delta)|} = e^{-\gamma|t-2\tau+\Delta|}$$

일반적으로 같지 않으므로 시간변화 시스템이다.

3. 시간변화 정량 분석

다음과 같은 거리 함수를 정의한다.

$$D(\Delta; t, \tau) = |h(t, \tau) - h(t - \Delta, \tau - \Delta)|$$

이 값이 클수록 시간변화가 크다.

문제 11

다음 시스템에서 입력과 출력의 관계가 주어졌다.

$$S\{x(t)\} = \int_0^t e^{-\mu(t-\tau)} x^2(\tau) d\tau, \quad \mu > 0$$

1. 선형성 여부를 판단하고 그 이유를 서술하시오.
2. 시간불변성 여부를 판단하고 그 이유를 서술하시오.
3. 이 시스템의 미분방정식을 유도하시오.

풀이

1. 선형성

입력 신호가 제공되어 나타나는 비선형 연산이 포함되어 있으므로, 시스템은 **비선형**이다.

2. 시간불변성

커널 함수가 $t - \tau$ 로만 의존하며, 적분 구간도 0부터 t 로 정의되어 시간에 의존적이지만, 시스템이 인과적이며 커널이 시간차 함수이므로 **시간불변**으로 간주할 수 있다.

다만, 적분 상한이 t 이므로 엄밀히는 시간변화성 논의가 필요하나 일반적으로 인과적 시간불변 시스템으로 분류한다.

3. 미분방정식 유도

출력 $y(t) = S\{x(t)\}$ 에 대해,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}y(t) &= e^{-\mu(t-t)}x^2(t) + \int_0^t \frac{\partial}{\partial t} [e^{-\mu(t-\tau)}] x^2(\tau) d\tau \\ &= x^2(t) - \mu \int_0^t e^{-\mu(t-\tau)} x^2(\tau) d\tau = x^2(t) - \mu y(t) \end{aligned}$$

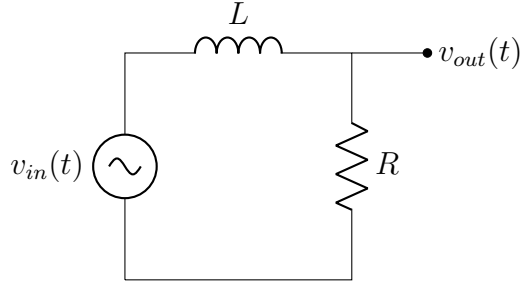
즉,

$$\frac{d}{dt}y(t) + \mu y(t) = x^2(t)$$

—

문제 12

아래 회로에서 입력 전압 $v_{in}(t)$ 과 출력 전압 $v_{out}(t)$ 의 관계를 분석하시오.



1. 시스템이 선형 및 시간불변인지 설명하시오.
2. 미분 방정식으로 표현하시오.
3. 임펄스 응답을 구하시오.

풀이

1. 선형성 및 시간불변성

저항과 인덕터 모두 선형, 시간불변 소자이므로 시스템은 **선형, 시간불변**이다.

2. 미분방정식

키르히호프 법칙에 의해,

$$v_{in}(t) = v_L(t) + v_R(t) = L \frac{d}{dt} i(t) + Ri(t)$$

출력 전압은 저항 양단 전압,

$$v_{out}(t) = Ri(t)$$

따라서,

$$v_{in}(t) = L \frac{d}{dt} \left(\frac{v_{out}(t)}{R} \right) + v_{out}(t) = \frac{L}{R} \frac{d}{dt} v_{out}(t) + v_{out}(t)$$

3. 임펄스 응답

라플라스 변환 후,

$$V_{in}(s) = \left(\frac{L}{R}s + 1 \right) V_{out}(s)$$

임펄스 입력 $V_{in}(s) = 1$ 일 때,

$$H(s) = \frac{V_{out}(s)}{V_{in}(s)} = \frac{1}{\frac{L}{R}s + 1} = \frac{R}{Ls + R}$$

역변환하면,

$$h(t) = \frac{R}{L} e^{-\frac{R}{L}t} u(t)$$

—

문제 13

다음 시스템을 고려하자.

$$S\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - \tau - \alpha)x(\tau)d\tau, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

1. 시스템의 의미를 설명하고 선형성과 시간불변성을 평가하시오.
2. 임펄스 응답을 구하시오.
3. α 가 음수일 경우 시스템 해석을 서술하시오.

풀이

1. 시스템 의미 및 특성

이 시스템은 입력 신호를 α 만큼 지연시키는 지연 시스템이다.

$$y(t) = x(t - \alpha)$$

선형 및 시간불변 시스템이다.

2. 임펄스 응답

임펄스 응답은 시스템 출력 $h(t) = S\{\delta(t)\}$ 이며,

$$h(t) = \delta(t - \alpha)$$

3. $\alpha < 0$ 인 경우

$\alpha < 0$ 이면, 입력 신호가 미래로 $|\alpha|$ 만큼 이동한다. 물리적으로 인과성을 위배하는 비인과 시스템이다.

—

문제 14

다음 시스템에 대해

$$S\{x(t)\} = \int_0^t (t - \tau)^n x(\tau) d\tau, \quad n \in \mathbb{N}$$

1. 선형성 여부를 증명하시오.
2. 시간불변성 여부를 평가하시오.
3. $n = 0$ 인 경우 임펄스 응답을 구하시오.

풀이

1. 선형성

적분과 덧셈, 곱셈으로 이루어져 있으므로 **선형**이다.

2. 시간불변성

커널이 $t - \tau$ 에만 의존하므로, **시간불변**이다.

3. $n = 0$ 임펄스 응답

$n = 0$ 이면 커널은 1이다.

$$h(t) = u(t)$$

출력은 누적 적분

$$y(t) = \int_0^t x(\tau) d\tau$$

—

문제 15

다음 시스템에 대하여

$$S\{x(t)\} = x(t) + \int_0^t e^{-\lambda(t-\tau)} x(\tau) d\tau, \quad \lambda > 0$$

1. 선형성 및 시간불변성을 판단하시오.
2. 시스템의 라플라스 변환 표현을 구하시오.
3. 임펄스 응답을 구하시오.

풀이

1. 선형성 및 시간불변성

덧셈과 적분 연산으로 이루어져 있으므로 선형이며, 커널이 $t - \tau$ 에만 의존하므로 시간불변이다.

2. 라플라스 변환

입력 및 출력의 라플라스 변환은 각각 $X(s), Y(s)$ 이며,

$$Y(s) = X(s) + X(s) \frac{1}{s + \lambda} = X(s) \left(1 + \frac{1}{s + \lambda} \right) = X(s) \frac{s + \lambda + 1}{s + \lambda}$$

3. 임펄스 응답

임펄스 응답은

$$H(s) = \frac{s + \lambda + 1}{s + \lambda} = 1 + \frac{1}{s + \lambda}$$

역변환하면

$$h(t) = \delta(t) + e^{-\lambda t} u(t)$$

문제 16

다음 시스템이 주어졌다.

$$S\{x(t)\} = \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^t e^{-\alpha(t-\tau)} x(\tau) d\tau, \quad \alpha > 0$$

1. 시스템의 선형성과 시간불변성을 증명하시오.
2. 시스템의 임펄스 응답 $h(t)$ 를 구하시오.
3. 시스템의 전달 함수 $H(s)$ 를 구하시오.

풀이

1. 선형성 및 시간불변성

적분과 미분, 상수배 연산으로 구성되어 있으므로 시스템은 선형이다.
커널이 $t - \tau$ 에만 의존하므로 시간불변이다.

2. 임펄스 응답

임펄스 응답은

$$h(t) = \frac{d}{dt} (e^{-\alpha t} u(t)) = -\alpha e^{-\alpha t} u(t) + \delta(t)$$

3. 전달 함수

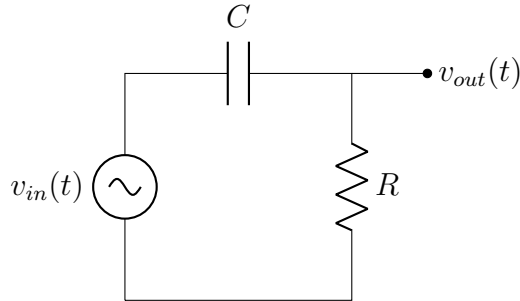
라플라스 변환에서,

$$H(s) = s \cdot \frac{1}{s + \alpha} = \frac{s}{s + \alpha}$$

—

문제 17

아래 회로에서 입력 전압 $v_{in}(t)$ 과 출력 전압 $v_{out}(t)$ 사이의 관계를 분석하시오.



1. 시스템이 선형 및 시간불변인지 증명하시오.
2. 미분방정식을 유도하시오.
3. 임펄스 응답을 구하시오.

풀이

1. 선형성 및 시간불변성

저항과 커패시터는 선형, 시간불변 소자이므로 시스템은 **선형 및 시간불변**이다.

2. 미분방정식

키르히호프 법칙에 따라,

$$v_{in}(t) = v_C(t) + v_R(t)$$

커패시터 전압과 전류 관계:

$$i(t) = C \frac{d}{dt} v_C(t)$$

저항 전압:

$$v_R(t) = Ri(t) = RC \frac{d}{dt} v_C(t)$$

따라서

$$v_{in}(t) = v_C(t) + RC \frac{d}{dt} v_C(t)$$

출력 $v_{out}(t) = v_C(t)$ 이므로

$$RC \frac{d}{dt} v_{out}(t) + v_{out}(t) = v_{in}(t)$$

3. 임펄스 응답

라플라스 변환 후,

$$(RCs + 1)V_{out}(s) = V_{in}(s) \implies H(s) = \frac{V_{out}(s)}{V_{in}(s)} = \frac{1}{RCs + 1}$$

역변환하면,

$$h(t) = \frac{1}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} u(t)$$

—

문제 18

다음 시스템이 있다.

$$S\{x(t)\} = x(t) \cdot \int_0^t e^{-\beta(t-\tau)} x(\tau) d\tau, \quad \beta > 0$$

1. 이 시스템이 선형인지 판단하고 이유를 서술하시오.
2. 시간불변성 여부를 판단하시오.
3. 시스템이 비선형이라면, 비선형성의 영향과 문제점을 논하시오.

풀이

1. 선형성 판단

입력 신호 $x(t)$ 와 적분 결과의 곱으로 구성되어 있어, 선형성 조건을 만족하지 않는다.
따라서 **비선형 시스템**이다.

2. 시간불변성 판단

적분 커널이 시간차에만 의존하지만, 곱셈 연산으로 인해 입력 지연이 출력 지연으로 단순 대응되지 않아 **시간변화 시스템**이다.

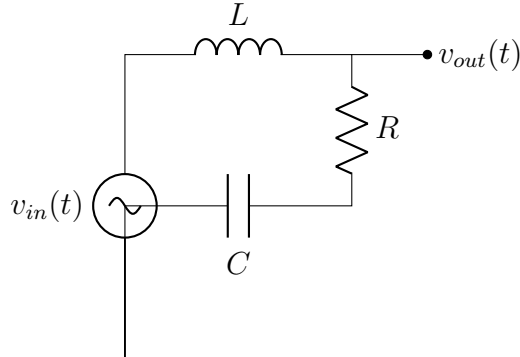
3. 비선형성 영향

비선형 항은 입력 신호의 두 배 함수 생성, 슈퍼포지션 원리 위배, 시스템 분석 및 제어를 어렵게 한다.

—

문제 19

아래 회로에 대하여 분석하시오.



1. 시스템 선형성 및 시간불변성을 평가하시오.
2. 시스템의 미분방정식을 유도하시오.
3. 임펄스 응답을 구하시오.

풀이

1. 선형성 및 시간불변성

저항, 인덕터, 커패시터 모두 선형, 시간불변 소자이므로 시스템은 **선형 및 시간불변**이다.

2. 미분방정식 유도

키르히호프 법칙 적용,

$$v_{in}(t) = v_L(t) + v_R(t) + v_C(t)$$

각 전압,

$$v_L(t) = L \frac{d}{dt} i(t), \quad v_R(t) = Ri(t), \quad v_C(t) = \frac{1}{C} \int i(t) dt$$

출력 전압은 저항과 인덕터 양단,

$$v_{out}(t) = v_L(t) + v_R(t)$$

따라서,

$$v_{in}(t) = v_{out}(t) + v_C(t)$$

미분 방정식 형태로는

$$L \frac{d}{dt} i(t) + Ri(t) + \frac{1}{C} \int i(t) dt = v_{in}(t)$$

3. 임펄스 응답

라플라스 변환 시

$$V_{in}(s) = (Ls + R + \frac{1}{C_s})I(s)$$

임펄스 응답은

$$H(s) = \frac{V_{out}(s)}{V_{in}(s)} = \frac{Ls + R}{Ls + R + \frac{1}{C_s}} = \frac{Ls + R}{Ls + R + \frac{1}{C_s}}$$

역변환은 부분분수 분해를 통해 수행한다.

—

문제 20

다음 시스템을 고려하자.

$$S\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\delta|t-\tau|} \cos(\omega_0(t+\tau))x(\tau)d\tau$$

1. 선형성 여부를 엄밀히 증명하시오.
2. 시간불변성 여부를 엄밀히 증명하시오.
3. 시간변화 정도를 정량적으로 평가하는 방법을 기술하시오.

풀이

1. 선형성

적분 연산은 선형 연산이므로 시스템은 **선형**이다.

2. 시간불변성

시간불변 조건은

$$h(t, \tau) = h(t - \Delta, \tau - \Delta)$$

이어야 한다.
주어진

$$h(t, \tau) = e^{-\delta|t-\tau|} \cos(\omega_0(t+\tau))$$

에서

$$h(t - \Delta, \tau - \Delta) = e^{-\delta|t-\tau|} \cos(\omega_0(t+\tau-2\Delta))$$

$\cos(\omega_0(t+\tau)) \neq \cos(\omega_0(t+\tau-2\Delta))$ 이므로
시간변화 시스템이다.

3. 시간변화 평가

시간변화 정도를

$$D(\Delta; t, \tau) = |h(t, \tau) - h(t - \Delta, \tau - \Delta)|$$

로 정의하고, 이를 통해 시간변화 정도를 수치화한다.

—